Spis treści

1. Macierze, wyznaczniki, równania liniowe

1. Które z iloczynów AB, BA, A^2, B^2 istnieją? Obliczyć te, które istnieją, jeżeli

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedź.
$AB = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 3 & 16 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 10 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$. Pozostałe iloczyny nie istnieją.

Obliczyć

2. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, **3.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3$, **5.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3$.

Odpowiedzi. **2.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, **3.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, **4.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, **5.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Czy dla macierzy A i B zawsze zachodzi $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Czy prawdą jest, że $(AB)^2 = A^2B^2$?

7. Wykazać, że macierz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ spełnia równanie:

$$x^2 - (a+d)\,x + (ad - bc) = 0.$$

Obliczyć wyznaczniki:

8. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & 8 \end{vmatrix}$, **9.** $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, **10.** $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$,

11. $\begin{vmatrix} \cos^2 x & 1 & \sin^2 x & 1 \\ \cos^2 y & 2 & \sin^2 y & 1 \\ \cos^2 z & 3 & \sin^2 z & 1 \\ \cos^2 t & 4 & \sin^2 t & 1 \end{vmatrix}$, **12.** $\begin{vmatrix} a-b & m-n & r-s \\ b-c & n-p & s-t \\ c-a & p-m & t-r \end{vmatrix}$,

13. $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$, **14.** $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Odpowiedzi. **8.** -126; **9.** 3; **10.** a^4-3a^2+1; **11.** 0; **12.** 0;
13. $1+a+b+c$; **14.** $(a-b)(a-c)(b-c)$.

Pokazać, że

15. $\begin{vmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \frac{x_1-x_2}{2} & \frac{y_1-y_2}{2} & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, **16.** $\begin{vmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Rozwiązać równania:

17. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$ **18.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 \\ x^2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0.$ **19.** $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$

20. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3-x & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3-x & -1 \\ 4 & 4 & 4 & 5-x \end{vmatrix} = 0$

Odpowiedzi. **17.** $-1, 0, 1$; **18.** 2, 3; **19.** $-2, 1$; **20.** 0, 1.

21. Pokazać, że macierz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ spełnia równanie

$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

Znaleźć A^{-1}, jeżeli:

22. $A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **23.** $A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$,

24. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, **25.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

26. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, **27.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$,

28. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, **29.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Odpowiedzi. **22.** A^T; **23.** A^T; **24.** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; **25.** $\begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;
26. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; **27.** $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;
28. $\begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$; **29.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

30. Macierz A spełnia równanie $A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Obliczyć $A^2 + A^{-2}$.

Rozwiązać równanie macierzowe:

31. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$,

32. $X \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

33. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

34. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + X$,

35. $X\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}^T.$

Odpowiedzi. **31.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, **32.** $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, **33.** $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$,
34. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, **35.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

36. Dla jakiej wartości parametru a równanie macierzowe
$\begin{bmatrix} a & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ ma rozwiązanie?

Rozwiązać podane układy Cramera:

37. $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=2 \end{cases}$, **38.** $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x-y+z=3 \\ -x+2y-z=2 \end{cases}$,

39. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x-y+2z=0 \\ 3x+4y-5z=0 \end{cases}$, **40.** $\begin{cases} x+y+z+t=4 \\ -x+y+z+t=2 \\ -x-y+z+t=0 \\ -x-y-z+t=-2 \end{cases}$.

Odpowiedzi. **27.** $x=2, y=2$; **38.** $x=3,\ y=2,\ z=-1$;
39. $x=y=z=0$; **40.** $x=y=z=t=1$.

Rozwiązać podane układy równań:

41. $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=2 \\ -x+3y=4 \end{cases}$, **42.** $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=2 \\ -x+y=4 \end{cases}$,

43. $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=3 \\ x+y=4 \end{cases}$, **44.** $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ 6x-3y=-9 \\ 4x-2y=-6 \end{cases}$,

45. $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x+y-z=1 \\ 2x+2y+z=5 \end{cases}$, **46.** $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x+y-z=1 \\ 2x+2y+z=6 \end{cases}$,

47. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+4y-4z=0 \\ 2x+3y-5z=0 \end{cases}$, **48.** $\begin{cases} 2x+y+z-t=0 \\ x-2y+z+2t=0 \\ 3x-y+2z+t=0 \end{cases}$,

49. $\begin{cases} 2x+y+z-2=0 \\ 3x+y+3z-2=0 \\ x+y+z=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$, **50.** $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x-y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$,

51. $\begin{cases} x-y-z-t=-1 \\ 2x-y+2z-t=2 \\ x+3z-2t=1 \\ 4x-2y+4z-4t=2 \end{cases}$, **52.** $\begin{cases} x-y-z-t=-1 \\ 2x-y+2z-t=2 \\ x+3z=3 \\ 4x-2y+4z-2t=4 \end{cases}$,

53. $\begin{cases} x+2y+z-3t=1 \\ 2x-y+z+t=2 \\ x+2y+z-3t=3 \\ 2x-y+z+3t=5 \end{cases}$, **54.** $\begin{cases} x+y+z=2 \\ y+z+2t+v=1 \end{cases}$.

Odpowiedzi. **41.** $x=2, y=2$; **42.** układ sprzeczny; **43.** układ sprzeczny; **44.** $x = x,\ \ y = 2x+3$ **45.** $x = -y+2,\ \ y = y,\ \ z = 1$; **46.** układ sprzeczny ; **47.** $x = -8z, y = 7z,\ \ z = z$; **48.** $x = x$, $y = -\frac{1}{3}x+t,\ z = -\frac{5}{3}x,\ t = t$; **49.** układ sprzeczny ; **50.** $x = 1, y = 1$, $z = 1$; **51.** $x = -3z+3,\ \ y = -4z+3,\ \ z = z,\ \ t = 1$; **52.** $x = -3z+3, y = y, z = z,\ \ t = 4-4z-y$, **53.** układ sprzeczny; **54.** $x = x, y = -x-z+2,\ z = z,\ t = t,\ v = x-1-2t$.

W zależności od parametru a podać warunki rozwiązalności układu:

55. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+ay+az=2 \end{cases}$, **56.** $\begin{cases} x+y=ax \\ -x+y=ay \end{cases}$,

57. $\begin{cases} ax+2y+2z=-1 \\ 2x-ay-z=-1 \\ 2x+y-z=a \end{cases}$, **58.** $\begin{cases} a^2x+4y+9z=2a \\ ax+2y+3z=a \\ x+y+z=1 \end{cases}$,

Odpowiedzi. **55.** układ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $a \neq 1$,nie ma rozwiązań dla $a = 1$. **56.** układ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $a \in \mathbb{R}$. **57.** układ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $a \neq -1$ i $a \neq -4$, ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $a = -1$, nie ma rozwiązań dla $a = -4$; **58.** układ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $a \neq 2$ i $a \neq 3$, ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $a = 2$, nie ma rozwiązań dla $a = 3$.

2. Geometria analityczna

1*. Pokazać, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległogoku.

2*. Pokazać, że przekątne równoległoboku przecinają się w połowie.

3. Dla jakich wartości parametrów m i k wektory $\vec{a} = (4, -3, 6k)$, $\vec{b} = (2m, 1, -4)$ są równoległe.

4. Znaleźć kąt między wektorami:

(a) $\vec{a} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{b} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

(b) $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = \left(-\sqrt{2} + \sqrt{6}, \sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$,

(c) $\vec{a} = \left(1, -\sqrt{2}, 1\right)$, $\vec{b} = \left(-1, -\sqrt{2}, 1\right)$.

5. Dla jakiej wartości parametru λ wektory $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (\lambda, -2, 2 + \lambda)$ są wzajemnie prostopadłe?

6. Sprawdzić, czy trójkąt ABC

(a) $A = (5, 4)$, $B = (3, 2)$, $C = (2, -1)$,

(b) $A = (5, 4, 1)$, $B = (3, 3, 2)$, $C = (1, 6, -5)$,

jest prostokątny.

7. Znaleźć cosinusy kierunkowe wektora $\vec{a} = (1, -1, 2)$.

8. Znaleźć rzut prostokątny wektora $\vec{a} = (2, -1, 1)$ na oś o kierunku wektora $\vec{b} = (1, 2, 1)$.

9. Znaleźć wektor jednostkowy $\vec{m}$ prostopadły do wektorów $\vec{a} = (2, -1, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, -1)$.

10. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach:

(a) $P = (3, 4, -3)$, $Q = (6, 2, 3)$, $R = (0, -1, 5)$,

(b) $P = (-2, 2)$, $Q = (4, -2)$, $R = (0, 3)$.

11*. Pokazać,że pole równoległoboku zbudowanego na przekątnych danego równoległoboku jest równa podwojonemu polu danego równoległoboku.

12*. Wyprowadzić twiedzenie sinusów. *Wskazówka:* Wykorzystać fakt, że warunkiem, aby niewspólinowe wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tworzyły trójkąt jest $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Następnie wykorzystać iloczyn wektorowy.

13. Obliczyć objętość równoległościanu o wierzchołkach $O = (0, 0, 0)$, $P = (3, 4, -3)$, $Q = (6, 2, 3)$, $R = (0, -1, 5)$.

14. Wykazać, że punkty $P = (1, 2, 1)$, $Q = (0, -1, 5)$, $R = (1, 1, 2)$, $S = (3, 1, 0)$ leżą w jednej płaszczyźnie i obliczyć pole czworoboku o wierzchołkach P, Q, R, S.

15. Wykazać, że punkty $P = (0, 1, 2)$, $Q = (3, 1, -1)$, $R = (4, 1, 0)$, $S = (-1, 1, 5)$ są wierzchołkami trapezu i policzyć jego wysokość.

16*. Wykazać, że objętość równoległościanu zbudowanego na przekątnych ścian danego równoległościanu jest równa podwojonej objętości danego równoległościanu.

17. Napisać równania prostej przechodzącej przez punkty:
(a) $P = (1, -1, 1)$, $Q = (4, 1, 3)$,
(b) $P = (1, -1)$, $Q = (4, 1)$.

18. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (2, -1, 2)$ i równoległej do prostej $l : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

19. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P = (-1,\ 1,\ 2)$ i równoległej do płaszczyzny $\pi : 2x - 3y + 4z - 7 = 0$.

20. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P = (3,\ -1,\ -1)$ i prostopadłej do prostej $l : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

21. Znaleźć odległość punktu $P = (3, -1, -1)$ do prostej $l : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

22. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez:
(a) punkty $P = (0, 0, 2)$, $Q = (4, 0, 1)$, $R = (2, 1, 2)$,
(b) prostą $l : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ i punkt $P = (2, -1, 0)$,
(c) proste $l_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$, $\quad l_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = 4s \\ z = -2s \end{cases}$,
(d) proste $l_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$, $\quad l_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 - 2s \\ z = -1 + 2s \end{cases}$.

23. Czy przez proste $l_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$, $\quad l_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 - 2s \\ z = 5 + 2s \end{cases}$ można poprowadzić płaszczyznę?

24*. W zależności od parametru a podać wzajemne położenie prostych: $l_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + at \end{cases}$, $\quad l_2 : \begin{cases} x = -a - s \\ y = 3 - as \\ z = 2 - s \end{cases}$.

25*. Dla jakich wartości parametrów A, B prosta $l : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 - 4t \\ z = -3 + t \end{cases}$, leży w płaszczyźnie $\pi : Ax + 2y - 4z + B = 0$.

26. Przedstawić prostą $l : \begin{cases} 3x - 2y + 5z = 1 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases}$ w postaci parametrycznej.

27. Na sferze danej wzorem $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ wyznacz współrzędne punktów najbliższych i najdalszych od punktu $(1, 3, 4)$.

Odpowiedzi. **3.** $k = 2$, $m = -\frac{2}{3}$; **4.** (a) $\frac{2}{3}\pi$, (b) $\frac{\pi}{6}$, (c) $\frac{\pi}{3}$; **5.** $\lambda = -\frac{1}{2}$, **6.** (a) nie; (b) tak. **7.** $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}$; **8.** $\frac{1}{6}(1,\ 2,\ 1)$; **9.** $\frac{\pm 1}{\sqrt{35}}(-1,\ 3,\ 5)$; **10.** (a) $\frac{49}{2}$; (b) 7 **13.** 63; **14.** $\frac{3}{2}\sqrt{3}$; **15.** $\sqrt{2}$; **17.** (a) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$; **18.** $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$. **19.** $2\,(x + 1) - 3\,(y - 1) + 4\,(z - 2) = 0$. **20.** **21.** $\sqrt{\frac{325}{17}}$. **22.** (a) $x - 2y + 4z - 8 = 0$; (b) $2x - y - 5 = 0$; (c) $-x + 3y + 5z = 0$; (d) $2x - 3y - 4z - 3 = 0$. **23.** nie **25.** $A = 3$, $B = -23$. **26.** $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 4t \\ z = t \end{cases}$ **27.** $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}}\right)$.

3. Granice, pochodne funkcji i ich zastosowania

Znaleźć funkcje złożone $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$, $f \circ g$ dla:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 1 + x$;
2. $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$;
3. $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $g(x) = x^2$;
4. $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \frac{x}{x-2}$;
5. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \cos x$;
6. $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$;
7. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

Odpowiedzi. **1.** $(f \circ f)(x) = x$, $(g \circ g)(x) = x + 2$, $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x} + 1$, $(f \circ g) = \frac{1}{1+x}$; **2.** $(f \circ f)(x) = x^4$, $(g \circ g)(x) = \cos(\cos x)$, $(g \circ f)(x) = \cos x^2$, $(f \circ g) = \cos^2 x$; **3.** $(f \circ f)(x) = x$, $(g \circ g)(x) = x^4$, $(g \circ f)(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$, $(f \circ g) = \frac{x^2}{x^2-1}$; **4.** $(f \circ f)(x) = \frac{x}{2x+1}$, $(g \circ g)(x) = -\frac{x}{x-4}$, $(g \circ f)(x) = -\frac{x}{x+2}$, $(f \circ g) = \frac{1}{2}\frac{x}{x-1}$; **5.** $(f \circ f)(x) = \sqrt[4]{x}$, $(g \circ g)(x) = \cos(\cos x)$, $(g \circ f)(x) = \cos\sqrt{x}$, $(f \circ g) = \sqrt{\cos x}$; **6.** $(f \circ f)(x) = x^9$, $(g \circ g)(x) = \sqrt[9]{x}$, $(g \circ f)(x) = x$, $(f \circ g) = x$; **7.** $(f \circ f)(x) = \frac{x+x^3}{1+3x^2+x^4}$, $(g \circ g)(x) = x$, $(g \circ f)(x) = \frac{1+x^2}{x}$, $(f \circ g) = \frac{x}{1+x^2}$.

Niech $f(x) = x^2$, $g(x) = x+1$. Funkcję h przestawić za pomocą złożenia funkcji f i g.

8. $h(x) = x^2 + 1$, **9.** $h(x) = (x+1)^2$, **10.** $h(x) = (x^2+1)^2$,
11. $h(x) = x + 2$, **12.** $h(x) = (x+2)^2$, **13.** $h(x) = x^4$.

Odpowiedzi. **8.** $h(x) = (g \circ f)(x)$; **9.** $h(x) = (f \circ g)(x)$; **10.** $h(x) = (f \circ g \circ f)(x)$; **11.** $h(x) = (g \circ g)(x)$; **12.** $h(x) = (f \circ g \circ g)(x)$; **13.** $h(x) = (f \circ f)(x)$.

Obliczyć:

14. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; **15.** $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;
16. $\operatorname{arc\,tg}(-1)$; **17.** $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}$;
18. $\arcsin\left(\sin\frac{15\pi}{7}\right)$; **19.** $\arccos\left(\sin\frac{15\pi}{7}\right)$.

Odpowiedzi. **14.** $\frac{\pi}{3}$; **15.** $-\frac{\pi}{6}$; **16.** $-\frac{\pi}{4}$; **17.** $\frac{\pi}{3}$; **18.** $\frac{\pi}{7}$; **19.** $\frac{5\pi}{14}$.

20. Rozwiązać równanie $\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{2}$.
Odpowiedź. $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Obliczyć granice

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{3-n^3}$, **22.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{\sqrt{n^4+1}}$,

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$, **24.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\ldots+2n}{n^2}$,

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$, **26.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{5n-1}$,

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{5n-1}$, **28.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-0{,}7)^n}{5n-1}$,

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+(-1)^n}{3n}$, **30.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+2}}$,

31. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n-5^n}{4^n+7^n}$, **32.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n}}$,

33. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+7n}-2n\right)$, **34.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$,

35. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-n+1}\right)$, **36.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\left(n-\sqrt{n^2-a}\right)\right)$,

37. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b}\right)$, **38.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n-5}-n\sqrt{2}\right)$,

39. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-n}\right)$, **40.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n-2}$,

41. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$, **42.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2}$,

43. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)^n$, **44.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$,

45. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$, **46.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{3(x+3)2}$,

47. $\lim\limits_{x\to2}\frac{(x^2-4)\sqrt{x-1}}{x-2}$, **48.** $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}$,

49. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+a^2}\right)$, **50.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+a^2}\right)$,

51. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x^2+1}}}{e^x}$, **52.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4^x-5^x}{4^x+7^x}$,

53. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ **54.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$,

55. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, **56.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$,

57. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, **58.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$,

59. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$, **60.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{3x}$,

61. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin x}$, **62.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$,

63. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, **64.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$,

65. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$, **66.** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$,

67. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}$, **68.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$,

69. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+1}\right)^{2x}$, **70.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\ln(x+2)-\ln x\right)$,

71. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(\operatorname{arc\,tg} x)$, **72.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$.

Odpowiedzi. **21.** 0; **22.** 2; **23.** 1; **24.** 1; **25.** $\frac{4}{3}$; **26.** 0; **27.** 0; **28.** 0; **29.** 2; **30.** -1; **31.** 0; **32.** 1; **33.** $\frac{7}{4}$; **34.** 0; **35.** $\frac{1}{2}$; **36.** $\frac{a}{2}$; **37.** 0; **38.** $-\infty$; **39.** $+\infty$; **40.** e^3; **41.** $\sqrt{e}$; **42.** $\frac{1}{e}$; **43.** nie istnieje **44.** 0; **45.** ∞; **46.** $-\frac{1}{18}$; **47.** 4; **48.** 1; **49.** 0; **50.** $-\infty$; **51.** 1; **52.** 1; **53.** $+\infty$;

53. 1; **54.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; **55.** -1; **56.** $\frac{1}{2}$; **57.** 3; **58.** 3; **59.** 1; **60.** $\frac{2}{3}$; **61.** 5; **62.** $-\frac{1}{4}$; **63.** $\frac{1}{2}$; **64.** $6\sqrt{2}$; **65.** 1; **66.** 3; **67.** 0; **68.** e^6; **69.** $e^{\frac{2}{3}}$; **70.** 2; **71.** 1; **72.** $\frac{1}{2}$.

Korzystając z definicji wyprowadzić wzór na pochodną funkcji:

73. $f(x) = 3x$, **74.** $f(x) = x^2 + 1$, **75.** $f(x) = \frac{1}{2x}$,
76. $f(x) = \frac{1}{x+5}$, **77.** $f(x) = \sqrt{3x}$,
78. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, **79.** $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$.

Wyznaczyć pochodne podanych funkcji:

80. $f(x) = (2x+1)^2$, **81.** $f(x) = \frac{1}{10\,x^5}$,
82. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}$, **83.** $f(x) = \frac{x}{2x-1}$,
84. $f(x) = \sqrt{x^2+5}$, **85.** $f(x) = x\sqrt{x^2+5}$,
86. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$, **87.** $f(x) = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$,
88. $f(x) = e^{x^2}$, **89.** $f(x) = e^{\sin x}$,
90. $f(x) = e^{\sqrt{\sin x}}$, **91.** $f(x) = \ln\cos x$,
92. $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$, **93.** $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2} - x\,\mathrm{arc\,tg}\,x$,
94. $f(x) = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{x}$, **95.** $f(x) = \mathrm{tg}^3\,\frac{x}{3}$,
96. $f(x) = \arcsin\frac{1}{x^2} + \ln^5 x$, **97.** $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+k}\right)$,
98. $f(x) = x\left(\sin\ln x + \cos\ln x\right)$. **99.** $f(x) = e^{2x}(x+3)$.

Odpowiedzi. **80.** $f'(x) = 8x+4$; **81.** $f'(x) = \frac{-1}{2x^6}$; **82.** $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; **83.** $f'(x) = -\frac{1}{(2x-1)^2}$; **84.** $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$; **85.** $f'(x) = \frac{5+2x^2}{\sqrt{x^2+5}}$; **86.** $f'(x) = \frac{5}{\left(\sqrt{x^2+5}\right)^3}$; **87.** $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$; **88.** $f'(x) = e^{x^2}\cdot 2x$; **89.** $f'(x) = e^{\sin x}\cdot\cos x$; **90.** $f'(x) = e^{\sqrt{\sin x}}\cdot\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$; **91.** $f'(x) = -\,\mathrm{tg}\,x$; **92.** $f'(x) = \frac{2}{x^2-1}$; **93.** $f'(x) = -\,\mathrm{arc\,tg}\,x$; **94.** $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$; **95.** $f'(x) = 3\,\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{3}$ **96.** $f'(x) = \frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}} + 5\frac{\ln^4 x}{x}$ **97.** $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$ **98.** $f'(x) = 2\cos\ln x$ **99.** $f'(x) = e^{2x}(2x+7)$.

100. $f(x) = \arcsin\frac{x-1}{x}$; obliczyć $f'(5)$. Odpowiedź. $\frac{1}{15}$.

101. $y = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$; wyznaczyć $\frac{d^2y}{dx^2}$.
Odpowiedź. $\frac{dy}{dx} = e^{2x} - e^{-2x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)$;

102. $y = x\cdot\ln\frac{1}{x}$; wyznaczyć $\frac{d^2y}{dx^2}$.
Odpowiedź. $\frac{dy}{dx} = -\left(\ln x + 1\right)$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x}$.

103. $f(x) = \ln(1+x^2)$; obliczyć $f(0)$, $f'(0)$ i $f''(0)$.
Odpowiedź. $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f'(0) = 2$.

104. Wykazać,że funkcja $y = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3}$ spełnia równanie różniczkowe $y'' + 2\left(y'\right)^2 x = 0$.

105. Wykazać,że funkcja $y = e^x \cos x$ spełnia równanie różniczkowe $y^{IV} + 4y = 0$.

106. Napisać równanie stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a) $f(x) = x^2 - 1$, $(0, f(0))$;
(b) $f(x) = x^2 - 1$, $(1, f(1))$;
(c) $f(x) = x^2 - 1$, $(-1, f(-1))$;
(d) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $(0, f(0))$;
(e) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $(1, f(1))$;
(f) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$, $(1, f(1))$;
(g) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$, $(0, f(0))$;
(h) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1-x}{1+x}$, $(0, f(0))$.

Odpowiedzi. (a) $y = -1$; (b) $y = 2x - 2$; (c) $y = -2x - 2$; (d) $y = 2x$; (e) $y = 1$; (f) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$; (g) $y = 2x$; (h) $y = -x + \frac{\pi}{4}$.

107. Na krzywej $y = x^2 (x-2)^2$ znaleźć punkty, w których styczne są równoległe do osi Ox.

108. Obliczyć Δf i df dla:

(a) $f(x) = x^2 - x$ przy $x = 10$ i $\Delta x = 0,1$;
(b) $f(x) = x^3 + 2x$ przy $x = 2$ i $\Delta x = 0,1$;
(c) $f(x) = \sqrt{x}$ przy $x = 4$ i $\Delta x = 0,2025$.

Odpowiedzi. (a) $\Delta f = 1,91$ $df = 1,9$; (b) $\Delta f = 1,461$ i $df = 1,4$; (c) $\Delta f = 0,05$, $df = 0,050625$.

109. Przy pomocy różniczki obliczyć wartość przybliżoną.

(a) $\operatorname{arc\,tg} 1,03$; (b) $\sqrt[3]{63}$; (c) $\sin 31°$; (d) $\ln 0,99$.

Odpowiedzi. (a) 0, 8004; (b)$3,9792$; (c) 0, 51511; (d) $-0,\ 01$.

Za pomocą reguły de L'Hospitala obliczyć granice:

110. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x}$; **111.** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin x - \cos x}$;
112. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{1-x^2}$; **113.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(2^x+1)}{x}$;
114. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}$; **115.** $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \operatorname{tg} x}$;

116. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$; **117.** $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$;
118. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$; **119.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arc\,tg} x}$;
120. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$; **121.** $\lim\limits_{x\to 0} x^2\, e^{\frac{1}{x^2}}$;
122. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$; **123.** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x\,(1+x)$;
124. $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$; **125.** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$;
126. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$, **127.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$;
128. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$; **129.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

Odpowiedzi. **110.** 0; **111.** $\sqrt{2}$; **112.** $-\frac{1}{2}$; **113.** $\ln 2$; **114.** 0; **115.** 1; **116.** $a-b$ **117.** $\frac{1}{e}$; **118.** $-\frac{1}{2}$; **119.** $\frac{1}{3}$; **120.** 0; **121.** ∞ **122.** 1; **123.** 0; **124.** $\frac{2}{\pi}$; **125.** 1; **126.** e^{-1}; **127.** e^3; **128.** $\sqrt{e}$; **129.** 1.

130. Uzasadnić podane tożsamości:
(a) $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x$ dla $x>0$,
(b) $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x$ dla $x<0$,
(c) $\operatorname{arc\,tg} x=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}$ dla $x\in(-1,\infty)$,
(d) $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=2\operatorname{arc\,tg} x$ dla $x\in(-1,1)$.

Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema podanych funkcji:

131. $f(x)=e^{-x^2}$, **132.** $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,
133. $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$, **134.** $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}$,
135. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ **136.** $f(x)=\frac{1}{e^x-1}$,
137. $f(x)=x+\frac{4}{x-5}$, **138.** $f(x)=\frac{x}{4-x^2}$,
139. $f(x)=\frac{x^3}{3-x^2}$, **140.** $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$,
141. $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$, **142.** $f(x)=x^2\sqrt{2-x^2}$,
143. $f(x)=x\ln x$, **144.** $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

Odpowiedzi. **131.** $\searrow$ w $(0,\ +\infty)$, $\nearrow$ w $(-\infty,\ 0)$; 0, maksimum; **132.** $\searrow$ w $(0,\ +\infty)$, $\nearrow$ w $(-\infty,\ 0)$; 0, maksimum; **133.** $\searrow$ w $(-\infty,\ -1)$; $(1,\ +\infty)$, $\nearrow$ w $(-1,1)$; -1 minimum, 1-maksimum; **134.** $\searrow$ w $\left(-\infty,\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, i $\left(0,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\nearrow$ w $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$, i $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ +\infty\right)$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, minima, 0, maksimum **135.** $\searrow$ w $(-1,\ 0)$ i $(0,\ 1)$, $\nearrow$ w $(-\infty,\ -1)$ i $(1,\ +\infty)$; -1 maksimum, 1 minimum; **136.** $\searrow$ w $(-\infty,\ 0)$ i $(0,\ \infty)$, brak ekstremów; **137.** $\searrow$ w $(3,\ 5)$ i $(5,\ 7)$ $\nearrow$ w $(-\infty,\ 3)$ i $(7,\ +\infty)$; 3 maksimum, 7 minimum; **138.** $\nearrow$ w $(-\infty,\ -2)$, $(-2,\ 2)$ i $(2,\ +\infty)$; brak ekstemów; **139.** $\searrow$ w $(-\infty,\ -3)$ i $(3,\ +\infty)$, $\nearrow$ w $\left(-3,\ -\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\right)$ i $\left(\sqrt{3},\ 3\right)$; -3 maksimum, 3 minimum; **140.** funkcja rosnąca; brak ekstemów; **141.** $\searrow$ w $\left(-\sqrt{2},\ -1\right)$ i $\left(1,\ \sqrt{2}\right)$, $\nearrow$ w $(-1,\ 1)$; -1 minimum, 1 maksimum; **142.** $\searrow$ w $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$ i $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\ \sqrt{2}\right)$, $\nearrow$ w $\left(-\sqrt{2},\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

i $\left(0,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$; $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ maksima; **143.** $\searrow$ w $\left(0,\ \frac{1}{e}\right)$, $\nearrow$ w $\left(\frac{1}{e},\ +\infty\right)$; $\frac{1}{e}$ minimum; **144.** $\searrow$ w $(0,\ 1)$ i $(1,\ e)$, $\nearrow$ w $(e,\ +\infty)$; e minimum.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość podanych funkcji we wskazanych przedziałach.

145. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$, $[-4,\ 4]$;
146. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $[0,\ 4]$.
147. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$, $[-1,\ 1]$.

Odpowiedzi. **145.** największa 76, najmniejsza -5; **146.** największa 4, najmniejsza 0. **147.** największa 2, najmniejsza -12;

148. Liczbę 2 rozbić na sumę dwóch składników dodatnich, tak aby ich iloczyn był największy.

149. Ile razy objętość kuli jest większa od objętości największego walca wpisanego w tę kulę?

Odpowiedź. $\sqrt{3}$.

150. Z koła wycięto wycinek o kącie α, a następnie zwinięto go tworząc powierzchnię stożka. Dla jakiej wartości kąta α objętość stożka będzie największa?

Odpowiedź. $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Liczby zespolone

Pokazać, że

1. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, **2.** $z + \overline{z} = 2\ \mathrm{Re}\, z$, **3.** $z - \overline{z} = 2i\ \mathrm{Im}\, z$, **4.** z jest liczbą rzeczywistą $\Leftrightarrow z = \overline{z}$.

Obliczyć:

5. $(2+i)(2-i)$,	**6.** $(2+i)^2$,
7. $\frac{1}{1-i}$,	**8.** $\frac{1-i}{1+i}$,
9. $\frac{1}{(1-i)^2}$,	**10.** $(1-i)^{10}$,
11. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$,	**12.** $\left(\frac{2+i}{3-i}\right)^4$,
13. $\mathrm{Re}\, \frac{3+i}{1-i}$,	**14.** $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{3+i} - \frac{1}{3-i}\right)$,
15. $\sum_{k=0}^{5} i^k$,	**16.** $i + i^{22} + i^{23} + i^{24} + i^{25}$.

Odpowiedzi. **5.** 5; **6.** $3 + 4i$, **7.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; **8.** $-i$; **9.** $\frac{1}{2}i$; **10.** $-2^5\, i$; **11.** 1; **12.** $-\frac{1}{4}$; **13.** 1; **14.** $-\frac{1}{5}$; **15.** $1 + i$; **16.** i.

17. Niech $z = \frac{3+i}{1-3i}$. Obliczyć $\mathrm{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ oraz $\mathrm{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

18. Niech $\frac{b_1 + \alpha X i}{b_3} = \frac{b_2}{b_4 - \frac{1}{\alpha C} i}$, gdzie $b_1, b_2, b_3, b_4, \alpha, X$ i C są liczbami rzeczywistymi. Pokazać, że $X = \frac{C b_2 b_3}{\alpha^2 C^2 b_4^2 + 1}$.

19. Niech $(a + bi)^2 = z$. Znaleźć $\sqrt{-z}$, $\sqrt{\overline{z}}$, $\sqrt{-\overline{z}}$.

Rozwiązać równania:

20. $z^2 - 2z + 2 = 0$,
21. $z^2 - 2z + 4 = 0$,
22. $z^2 - iz + 2 = 0$,
23. $z^2 + 2(1+i)z + 2i = 0$,
24. $i\, z^2 - (4 - 5i)z - 10 = 0$,
25. $z^2 - 2(3 + 5i)z + 30i = 0$,
26. $(3 - i)z^2 - 2(2 - 3i)z - 4i = 0$.
27. $z^3 + 1 = 0$,
28. $z^3 - i = 0$.

Odpowiedzi. **19.** $1 \pm i$, **21.** $1 \pm i\sqrt{3}$, **22.** $2i$, $-i$; **23.** $-1 - i$; **24.** $-4 - 2i$, $-1 - 2i$; **25.** $3 + i$, $3 + 9i$; **26.** $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$, $1 - i$. **27.** -1, $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, **28.** $-i$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

29. Liczby zespolone u i v spełniają warunki $u^3 = v^3$. Czy $u = v$? Odpowiedź uzasadnić.

Następujące liczby przedstawić w postaci trygonometrycznej:

30. $z = -3 + i\sqrt{3}$, **31.** $z = 2 - 2i$,
32. $z = -1 - i\sqrt{3}$, **33.** $z = 1 - i \operatorname{ctg} \alpha, \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Odpowiedzi. **30.** $2\sqrt{3}\left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi\right)$; **31.** $2\sqrt{2}\left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi\right)$; **32.** $2\left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right)$; **33.** $\frac{1}{\sin\alpha}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\right)$.

Obliczyć

34. $\left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^7$, **35.** $\left(-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^7$,
36. $\left|(1+i)^6\right|$, **37.** $\left|\frac{i}{3+2i}\right|$,
38. $\left|\frac{(1-i)^3}{(3+2i)^2}\right|$, **39.** $\sqrt{3+4i}$,
40. $\sqrt{i}$, **41.** $\sqrt[4]{-1}$,
42. $\sqrt[3]{1}$, **43.** $\sqrt[3]{-i}$,
44. $\sqrt[6]{64}$, **45.** $\sqrt[6]{-1}$.
46. $\sqrt[4]{(3+4i)^4}$, **47.** $\sqrt[5]{1}$.

Odpowiedzi. **34.** -1; **35.** 1; **36.** 2^3; **37.** $\frac{1}{\sqrt{13}}$; **38.** $\frac{2\sqrt{2}}{13}$; **39.** $\pm(2+i)$; **40.** $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; **41.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$; **42.** $1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, **43.** $i, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, **44.** $\pm 2, \pm 1 \pm i\sqrt{3}$, **45.** $\pm i, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$, **46.** $\pm 4 \pm 3i$; **47.** 1, $\frac{-\left(\sqrt{5}+1\right) \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\frac{\left(\sqrt{5}-1\right) \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Czy wzory

48. $(\cos\alpha - i \sin\alpha)^n = \cos n\alpha - i \sin n\alpha$;
49. $(-\cos\alpha + i \sin\alpha)^{2n+1} = -\cos(2n+1)\alpha + i \sin(2n+1)\alpha$;
50. $(-\cos\alpha - i \sin\alpha)^{2n+1} = -\cos(2n+1)\alpha - i \sin(2n+1)\alpha$;
są prawdziwe? Odpowiedź uzasadnić.

Podane wielomiany rzeczywiste przedstawić w postaci iloczynu nierozkładalnych czynników rzeczywistych:

51. $x^6 - 1$, **52.** $x^6 + 1$,
53. $x^4 + x^2 + 1$, **54.** $x^4 - x^2 + 1$.

Odpowiedzi. **51.** $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$;
52. $(x^2+1)\left(x^2 + x\sqrt{3} + 1\right)\left(x^2 - x\sqrt{3} + 1\right)$;
53. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$;
54. $\left(x^2 + x\sqrt{3} + 1\right)\left(x^2 - x\sqrt{3} + 1\right)$.

5. Całki nieoznaczone

Obliczyć całki

1. $\int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x}\right) dx$; **2.** $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx$;
3. $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\, dx$; **4.** $\int (\operatorname{tg} x)^2\, dx$;
5. $\int (e^x + e^{-x})^2\, dx$; **6.** $\int \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$;
7. $\int e^x \sin e^x\, dx$; **8.** $\int e^x \sqrt{e^x}\, dx$;
9. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$; **10.** $\int e^{\cos x} \sin x dx$;
11. $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$; **12.** $\int \frac{dx}{x \ln x}$;
13. $\int \frac{dx}{x(3+\ln x)}$; **14.** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$;
15. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$; **16.** $\int x\sqrt{3-x^2}\, dx$;
17. $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}\, dx$; **18.** $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\sin x}}$;
19. $\int \operatorname{tg} x\, dx$; **20.** $\int \sqrt{\sin x} \cos x\, dx$;
21. $\int \sin^5 x\ \cos x\, dx$; **22.** $\int \cos^3 x\, dx$;
23. $\int x e^x\, dx$; **24.** $\int \ln x\, dx$;
25. $\int x \cos x\, dx$; **26.** $\int \arccos x\, dx$;
27. $\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx$; **28.** $\int \ln\sqrt{x}\, dx$;
29. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$; **30.** $\int \cos\sqrt{x}\, dx$;
31. $\int \frac{x}{x^2+1} dx$; **31.** $\int \frac{x^2 dx}{x^2+1}$;
33. $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$; **34.** $\int \frac{x^2}{x-2} dx$;
35. $\int \frac{x^2+4}{x^2+3}\, dx$; **36.** $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx$;
37. $\int \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}\, dx$; **38.** $\int \frac{dx}{(x+2)(x-1)}$;
39. $\int \frac{dx}{x^2-4}$; **40.** $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$;
41. $\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)}\, dx$; **42.** $\int \frac{x^2}{x^3-1}\, dx$;
43. $\int \frac{x}{x^4+1}\, dx$; **44.** $\int \sin^2 x dx$;
45. $\int \cos^2 x dx$; **46.** $\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$;
47. $\int x\ \operatorname{tg}^2 x\, dx$; **48.** $\int \frac{dx}{e^x-1}$;
49. $\int \sqrt{e^x-1}\, dx$; **50.** $\int \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)\, dx$;
51. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\, dx$; **52.** $\int \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\, dx$;
53. $\int x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}\, dx$; **54.** $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2}\, dx$;
55. $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\, dx$; **56.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$;
57. $\int \sqrt{1-\sin x}\, dx$; **58.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;
59. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\, dx$; **60.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx$.

Odpowiedzi. **1.** $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \ln|x| + C$; **2.** $\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$; **3.** $\frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 + \frac{3}{4}(\sqrt[3]{x})^4 + C$; **4.** $\operatorname{tg} x - x + C$; **5.** $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$; **6.** $\frac{1}{4}(\arcsin x)^4 + C$; **7.** $-\cos(e^x) + C$; **8.** $\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x} + C$; **9.** $\frac{2}{3}\left(\sqrt{(1+\ln x)}\right)^3 + C$. **10.** $-e^{\cos x} + C$; **11.** $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$; **12.** $\ln|\ln x| + C$; **13.** $\ln|3+\ln x| + C$; **14.** $2e^{\sqrt{x}} + C$; **15.** $2\sin\sqrt{x} + C$; **16.** $-\frac{1}{3}(3-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$; **17.**

$-\sqrt{3-x^2}+C$; **18.** $2\sin^{\frac{1}{2}}x+C$; **19.** $-\ln|\cos x|+C$; **20.** $\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x+C$; **21.** $\frac{1}{6}(\sin x)^6+C$; **22.** $\sin x-\frac{1}{3}(\sin x)^3+C$; **23.** xe^x-e^x+C; **24.** $x\ln x-x+C$; **25.** $\cos x+x\sin x+C$; **26.** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$; **27.** $x\,\mathrm{arc\,tg}\,x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$; **28.** $x\ln\sqrt{x}-\frac{1}{2}x+C$; **29.** $2(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}})+C$; **30.** $2(\cos\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\sqrt{x})+C$; **31.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$; **32.** $x-\mathrm{arc\,tg}\,x+C$; **33.** $\frac{1}{3}x^3-x+\mathrm{arc\,tg}\,x+C$; **34.** $\frac{1}{2}x^2+2x+4\ln|x-2|+C$; **35.** $x+\frac{1}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{3}x\sqrt{3}+C$; **36.** $\ln(x^2+x+1)+C$; **37.** $x+\ln(x^2+x+1)+C$; **38.** $-\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{1}{3}\ln|x-1|+C$; **39.** $\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+C$; **40.** $\ln x-\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}+C$; **41.** $-\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x-\frac{1}{2x-2}+C$; **42.** $\frac{1}{3}\ln|x^3-1|+C$; **43.** $\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x^2+C$ **44.** $-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x+C$. **45.** $\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x+C$. **46.** $x\,\mathrm{tg}\,x+\ln|\cos x|+C$; **47.** $x\,\mathrm{tg}\,x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C$; **48.** $\ln|e^x-1|-x+C$; **49.** $2\sqrt{e^x-1}-2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{e^x-1}+C$; **50.** $x\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)-\sqrt{x^2+2}+C$; **51.** $2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x}+C$; **52.** $x\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x}+C$; **53.** $\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x+C$; **54.** $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{\mathrm{arc\,tg}\,x}{x}+C$; **55.** $\ln x-\ln(x+1)-\frac{\ln(x+1)}{x}$; **56.** $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; **57.** $\pm 2\sqrt{1+\sin x}+C$; **58.** $2\arcsin\sqrt{x}+C$, **59.** $\frac{\mathrm{tg}^3\,x}{3}+C$. **60.** $\frac{\cos^2 x+1}{\cos x}+C$.

6. Zastosowania geometryczne całek

Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi

1. $y = 2x - x^2$, $y =; 0$ **2.** $y = x^2 - 4$, $y = 0$;
3. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$, $y = 0$; **4.** $y = x^2$, $y = x^4$;
5. $y = 2x$, $y = 3 - x^2$; **6.** $y = -x^2 + 4$, $y = x^2 - 2x$;
7. $y = 1 - x^2$, $y = -x - 5$; **8.** $y = x^2 - 1$, $y = x^2 + 2$, $y = 3$;
9. $y = \frac{x^2}{4}$, $y = x - 1$, $x = 0$; **10.** $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$;
11. $y = x - x^2\sqrt{x}$, $y = 0$; **12.** $y = x^3$, $y = x$;
13. $y = 2 - x^2$, $y^3 = x^2$; **14.** $y^2 = x$, $x = 4$;
15. $y = x^2$, $y^2 = x$; **16.** $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{4}{x}$, $y = 1$, $y = 4$;
17. $xy = 4$, $x + y = 5$; **18.** $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$;
19. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = e$; **20.** $y = x\sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$;
21. $y = \sqrt{2 - x^2}$, $y = 0$; **22.** $y = \frac{x}{1+x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$;
23. $y = x \ln x$, $y = 0$; **24.** $y = x \ln x$, $y = x$.

Odpowiedzi. **1.** $\frac{4}{3}$, **2.** $\frac{32}{3}$, **3.** $\frac{1}{2}$, **4.** $\frac{4}{15}$, **5.** $\frac{32}{3}$, **6.** 9, **7.** $\frac{125}{6}$, **8.** $\frac{28}{3}$, **9.** $\frac{2}{3}$, **10.** 9, **11.** $\frac{3}{14}$, **12.** $\frac{1}{2}$, **13.** $\frac{32}{15}$, **14.** $\frac{32}{3}$ **15.** $\frac{1}{3}$, **16.** $6 \ln 2$, **17.** $\frac{15}{2} - 8 \ln 2$, **18.** 1, **19.** 2, **20.** $\frac{16}{3}$, **21.** π, **22.** $\ln 2$, **23.** $\frac{1}{4}$, **24.** $\frac{1}{4}e^2$.

Obliczyć długośc łuku krzywej

25. $y = \frac{x-1}{3}$, gdzie $0 \le x \le 1$;
26. $y = 1 + \sqrt{2 - x^2}$;
27. $y = 2x\sqrt{x}$, gdzie $0 \le x \le 11$;
28. $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{x}} + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$, gdzie $1 \le x \le 2$;
29. $y = 2x + \operatorname{arc\,tg} 2x + \operatorname{arc\,tg} \frac{1-2x}{1+2x}$, gdzie $1 \le x \le 2$;
30. $y = \sqrt{x(1-x)} - \arccos \sqrt{1-x}$;
31. $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$;
32. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, gdzie $0 \le x \le 1$;
33. $y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}$, gdzie $1 \le x \le 2$;
34. $y = \ln(5 - 5x^2)$, gdzie $0 \le x \le \frac{1}{2}$.

Odpowiedzi. **25.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$, **26.** $\pi\sqrt{2}$, **27.** 74, **28.** 1, **29.** $\sqrt{5}$, **30.** 2, **31.** 2, **32.** $\frac{1}{2}(e - e^{-1})$, **33.** $\frac{779}{240}$, **34.** $\ln 3 - \frac{1}{2}$.

Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót dookoła osi Ox krzywych

35. $y = 2x$, gdzie $0 \le x \le 2$; **36.** $y = x^2$, $y^2 = x$;
37. $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$; **38.** $(x-1)^2 + y^2 = 4$;
39. $y = x^2 - 2x - 3$, $y = 0$; **40.** $x^2 + y^2 - 20y + 75 = 0$.

Odpowiedzi. **35.** $\frac{32}{3}\pi$, **36.** $\pi\frac{3}{10}$, **37.** 36π, **38.** $\frac{32}{3}\pi$, **39.** $\pi\frac{512}{15}$, **40.** $500\,\pi^2$.

Obliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót dookoła osi Ox krzywej

41. $y = 2x$, gdzie $0 \leq x \leq 2$;
42. $y = \sqrt{9 - x^2}$;
43. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, gdzie $0 \leq x \leq 2$;
44. $y = \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{3}x\right)$, gdzie $1 \leq x \leq 2$;
45. $x^2 + y^2 - 20y + 75 = 0$.
46. $y = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} \frac{1-x}{1+x}$, gdzie $1 \leq x \leq 2$.

Odpowiedzi. **41.** $8\sqrt{5}\,\pi$; **42.** $36\,\pi$; **43.** $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^{-4} + 4\right)$; **44.** $\frac{11}{9}\,\pi$; **45.** $200\,\pi^2$; **46.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\,\pi^2$.

7. Pochodne cząstkowe, różniczki zupełne i ich zastosowania

1. Pokazać, że funkcja $z(x,y)=x^y$ spełnia równanie
$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

2. Pokazać, że funkcja $z(x,y)=y+F\left(x^2-y^2\right)$ spełnia równanie
$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x$ dla

a) $F(u)=\sin u$ b) $F(u)=\operatorname{arc\,tg} u$.

3. Pokazać, że funkcja $z(x,y)=e^{\frac{x}{y}}\ln y$ spełnia równanie
$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{\ln y}$.

4. Pokazać, że funkcja $T(l,g)=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ spełnia równanie
$l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=0$.

5. Pokazać, że funkcja $z(x,y)=yF\left(x^2-y^2\right)$ spełnia równanie
$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$ dla

a) $F(u)=\operatorname{arc\,tg} u$ b) $F(u)=\frac{1}{\sin u}$.

6. Pokazać, że funkcja $z(x,y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$ spełnia równanie
$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$.

7. Pokazać, że funkcja $z(x,y)=\sqrt{x}\sin\frac{x}{y}$ spełnia równanie
$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{2}$.

8. Pokazać, że funkcja $u(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ spełnia równanie
$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1$.

9. Pokazać, że funkcja $V(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ spełnia równanie
$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$.

10. Pokazać, że funkcja $z(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$ spełnia równanie $y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}$.

11. Pokazać, że funkcja $z(x,y)=\ln\left(e^x+e^y\right)$ spełnia równanie
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$.

12. Pokazać, że funkcja $u(x,y)=xe^{-\frac{y}{x}}$ spełnia równanie
$x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

13. Pokazać, że funkcja $z(x,y)=\ln\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$ spełnia równanie
$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2}$.

14. Obliczyć Δf df dla funkcji $f(x,y)=\frac{y}{x}$, gdy $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0,1$, $\Delta y=-0,2$.

15. Przy odkształcaniu stożka jego promień R zwiększył się z 30 do $30,1$ cm, zaś wysokość H zmniejszyła się z 60 do $59,5$ cm. Obliczyć w przybliżeniu zmianę objętości V stosując wzór $dV \approx \Delta V$.

Znaleźć wszystkie punkty krytyczne podanych funkcji:

16. $g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+(x+y-1)^2}$;

17. $g(t,s)=\sqrt{(1+t)^2+t^2+s^2}$;

18. $f(x,y)=xy\sqrt{4R^2-x^2-y^2}$.

Odpowiedzi. **16.** $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. **17.** $\left(-\frac{1}{2},0\right)$; **18.** $(0,0)$, $(0,\pm 2R)$, $(\pm 2R,0)$ $\left(\pm\frac{2R}{\sqrt{3}},\pm\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)$.

Znaleźć ekstrema podanych funkcji:

19. $f(x,y)=3x+6y-x^2-xy-y^2$

20. $f(x,y)=2xy-4x-2y$

21. $f(x,y)=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$

22. $f(x,y)=x^3+y^3-9xy$

23. $f(x,y)=xy(6-x-y)$

24. $f(x,y)=y^2+x^2(1+y)^3$

25. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-6\ln x$

26. $f(x,y)=x^2+y-2\ln xy$

27. $f(x,y)=x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2}$

28. $f(x,y)=x^2y+\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$

29. $f(x,y)=x+y+\frac{8}{xy}$

30. $f(x,y)=\frac{8}{x}+\frac{x}{y}+y$

31. $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

32. $f(x,y)=e^{-x}\left(x^2-2y\right)$

33. $f(x,y)=e^{-2x}\left(x-y^2\right)$

34. $f(x,y)=\left(x^2+y\right)\sqrt{e^y}$

35. $f(x,y)=e^{2x^2-xy+y^2}$

36. $f(x,y)=e^{-\left(x^2+y^2+2x\right)}$.

Odpowiedzi. **19.** $(0,3)$ maksimum, **20.** brak ekstremum, **21.** $(0,0)$ minimum, **22.** $(3,3)$ minimum, **23.** $(2,2)$ maksimum, **24.** $(0,0)$ minimum, **25.** $(2,-1)$ minimum, **26.** $(1,2)$ minimum, **27.** $(-1,-1)$, $(-1,1)$ $(1,-1)$, $(1,1)$ minima, **28.** $(1,1)$ minimum, $(-1,-1)$ maksimum, **29.** $(2,2)$ minimum, **30.** $(4,2)$ minimum, **31.** $(4,4)$ maksimum, **32.** brak ekstremum, **33.** $(\frac{1}{2},0)$ maksimum, **34.** $(0,-2)$ minimum, **35.** $(0,0)$ minimum, **36.** $(-1,0)$ maksimum.

37. Znaleźć odległość punktu $M=(2,5,1)$ od płaszczyzny $\pi: x+2y-z+1=0$.

38. Znaleźć odległość między prostymi

$$l_1:\left\{\begin{array}{rcr} x&=&1+t,\\ y&=&-t,\\ z&=&0,\end{array}\right.\qquad l_2:\left\{\begin{array}{rcl} x&=&0,\\ y&=&0,\\ z&=&s,\end{array}\right. .$$

39. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji
$f(x, y) = xy\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2}$ na zbiorze D, gdzie $D : x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 4R^2$.

40. W sferę o średnicy $2R$ wpisać prostopadłościan o największej objętości.

41. Znaleźć wartość najmniejszą i największą funkcji
$f(x, y) = xy(3 - x - y) = 3xy - x^2y - xy^2$ na domkniętym trójkącie ograniczonym prostymi $x + y = 3$, $x = 0$, $y = 0$.

42. Wśród prostopadłościanów, których suma długości wszystkich krawędzi wynosi 12 znaleźć ten o największej objętości.

43. Znaleźć wartość najmniejszą i największą funkcji
$f(x, y) = 2\left(xy + x\left(3 - x - y\right) + y\left(3 - x - y\right)\right)$ na domkniętym trójkącie ograniczonym prostymi $x + y = 3$, $x = 0$, $y = 0$.

44. Wśród prostopadłościanów, których suma długości wszystkich krawędzi wynosi 12 znaleźć ten o największym polu powierzchni.

45. Znaleźć wartość najmniejszą i największą funkcji
$f(x, y) = xy + 2x\left(3 - x - y\right) + 2y\left(3 - x - y\right)$ na domkniętym trójkącie ograniczonym prostymi $x + y = 3$, $x = 0$, $y = 0$.

46. Wśród prostopadłościanów, których suma długości wszystkich krawędzi wynosi 12 znaleźć ten, którego suma powierzchni pięciu ścian jest największa.

8. Całki podwójne

Obliczyć całki podwójne:

1. $\iint\limits_D xy^3 dxdy$, gdzie $D = [0,1] \times [0,2]$.

2. $\iint\limits_D \frac{y}{x^2}\, dxdy$, gdzie $D = [1,2] \times [0,1]$.

3. $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dxdy$, gdzie $D = [0,3] \times [1,3]$.

4. $\iint\limits_D (x - y)\, dxdy$, gdzie $D = [-1,1] \times [-2,2]$.

5. $\iint\limits_D xy\,(x - y)\, dxdy$, gdzie $D = [0,a] \times [0,b]$.

6. $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2} dxdy$, gdzie $D = [0,1] \times [0,1]$.

7. $\iint\limits_D e^{2x-y} dxdy$, gdzie D jest prostokątem o wierzchołkach $O = (0,0)$, $P = (2,0)$, $Q = (2,1)$, $R = (0,1)$.

8. $\iint\limits_D (1 + 2y)\, dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $x = 0$, $y = 0$, $y = 3 - x$.

9. $\iint\limits_D \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) dxdy$, gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $A = (1,1)$, $B = (2,1)$, $C = (2,2)$.

10. $\iint\limits_D (x + 1)\, dxdy$, gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach:

a) $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$;
b) $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(0,\ 1)$;
c) $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$;
d) $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(0,\ 1)$.

11. $\iint\limits_D (y - 2x)\, dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $x = 0$, $y = 0$, $2x + y - 2 = 0$.

12. Niech D będzie trójkątem o wierzchołkach $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$. Obliczyć

a) $\iint\limits_D x\ dxdy$;
b) $\iint\limits_D y\ dxdy$.

13. $\iint\limits_D dxdy$, gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $O = (0,0)$, $P = (2,1)$, $Q = (4,3)$.

14. $\iint\limits_D xy\ dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywą $x^2 + y^2 = 1$.

15. $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywą $x^2+y^2=a^2$.

16. $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2} dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywą $x^2+y^2=a^2$.

17. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\, dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $x=-1$, $x=1$, $y=0$, $y=x^2$.

18. $\iint\limits_D (1-x^2)\, dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $x=1$, $y^2=x$.

19. $\iint\limits_D (6-x)\, dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $x=6$, $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$.

20. $\iint\limits_D (4-y^2)\, dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $y=\frac{x^2}{2}$, $y=2$.

Odpowiedzi. **1.** 2, **2.** $\frac{1}{4}$, **3.** 44, **4.** 0, **5.** $-\frac{1}{6}b^2a^2+\frac{1}{6}b^2a^3$, **6.** $\frac{1}{12}\pi$, **7.** $-\frac{1}{2}\left(e^3-e^4-e^{-1}+1\right)$, **8.** $\frac{27}{2}$, **9.** $\frac{1}{2}$, **10.** (a) $\frac{5}{6}$; (b) $\frac{2}{3}$; (c) $\frac{2}{3}$; (d) $\frac{5}{6}$, **11.** 0, **12.** (a) 0; (b) $\frac{1}{3}$, **13.** 1, **14.** 0, **15.** $4a$, **16.** $\frac{8}{3}a^3$, **17.** $\frac{52}{105}$, **18.** $\frac{16}{21}$, **19.** $\frac{48}{5}\sqrt{6}$ **20.** $\frac{256}{21}$.

Pokazać, że:

21. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y} dy \right) dx = 1.$

22. $\int\limits_0^{3} \left(\int\limits_{\frac{x}{3}}^{1} e^{y^2} dy \right) dx = \frac{3}{2}(e-1).$

23. $\int\limits_{-a}^{a} \left(\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2} dy \right) dx = \frac{8}{3}a^3.$

24. $\int\limits_0^{a} \left(\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dy \right) dx = \frac{a^2}{2}.$

9. Równania różniczkowe zwyczajne

Narysować linie całkowe równań:

1. $y' = -\sin x$, **2.** $y' + y \operatorname{tg} x = 0$,
3. $y'(x^2-4) = 2xy$ **4.** $yy' + x = 0$,
5. $xy' - y = 0$, **6.** $xy' + y = 0$,
7. $y' = y$ **8.** $y' = y^2$.

Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

9. $x^2y' + y = 0$, **10.** $y'\sqrt{a^2+x^2} = y$,
11. $y'x^3 = 2y$, **12.** $dr + r \operatorname{tg}\varphi \, d\varphi = 0$; $r(\pi) = 2$,
13. $\frac{dx}{dt} = x - x^2$, $x(0) = \frac{1}{2}$, **14.** $y' = -0,005y$, $y(0) = 10^5$
15. $y' = -0,005y + 25$, $y(0) = 10^5$ **16.** $y' = e^{-y}\cos 2x$, $y(0) = 0$,
17. $2y'\sqrt{x} = y$; $y(4) = 1$, **18.** $(1+x^2)\,y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$; $y(0) = 1$,
19. $x^2y' + y^2 = 0$; $y(-1) = 1$, **20.** $y' = (2y+1)\operatorname{ctg} x$; $y = \frac{1}{2}$, gdy $x = \frac{\pi}{4}$,
21. $(1+x^2)\,y' + 1 + y^2 = 0$, **22.** $(x^2+x)\,y' = 2y+1$,
23. $y' = 10^{x+y}$, **24.** $y' = 2\sqrt{y}\ln x$; $y(e) = 1$.

Odpowiedzi **9.** $y = Ce^{\frac{1}{x}}$; **10.** $y = C\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)$; **11.** $y = C\,e^{-\frac{1}{x^2}}$; **12.** $r = -2\cos\varphi$; **13.** $x = \frac{1}{1+e^{-t}}$; **14.** $y = 10^5 e^{-0,005t}$; **15.** $y = 5000\,(1 + 19e^{-0,005t})$; **16.** $y = \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x + 1\right)$; **17.** $y = \frac{1}{e^2}\,e^{\sqrt{x}}$; **18.** $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$. **19.** $y = -x$; **20.** $y = 2\sin^2 x - \frac{1}{2}$; **21.** $y = \frac{C-x}{1+Cx}$; **22.** $2y+1 = C\frac{x^2}{(1+x)^2}$; **23.** $-10^{-y} = 10^x + C$; **24.** $\sqrt{y} = x\ln x - x + 1$;

Równania różniczkowe postaci $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

25. $y' = \frac{x+y}{x}$ **26.** $x^2y' = y^2 + xy$,
27. $\frac{ds}{dt} = \frac{s}{t} - \frac{t}{s}$, **28.** $xy' + 2\sqrt{xy} = y$,
29. $2xyy' = y^2 - x^2$, **30.** $y'x - y = \sqrt{x^2+y^2}$, $y(1) = 0$,
31. $x^2y' = y^2 - xy$; $y(-1) = 1$, **32.** $xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$; $y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$,
33. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)\,y'$, **34.** $(xy' - y)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = x$; $y(1) = 0$,
35. $yy' = 2y - x$, **36.** $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$,

Odpowiedzi **25.** $y = x\ln|x| + Cx$; **26.** $y = \frac{x}{C - \ln|x|}$; **27.** $s^2 = 2t^2\ln\frac{C}{t}$; **28.** gdy $x > 0$, $\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln\frac{C}{x}$, gdy $x < 0$, $\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln Cx$; **29.** $x^2 + y^2 = Cx$; **30.** $y = \frac{x^2-1}{2}$; **31.** $y = \frac{2x}{1-3x^2}$; **32.** $y = xe^{-\frac{x}{2}}$; **33.** $y^2 = Cxe^{-\frac{y}{x}}$; **34.** $x^2 + y^2 = e^{2\frac{y}{x}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$; **35.** $y - x = Ce^{\frac{x}{y-x}}$; **36.** $y - 2x = Cx^3\,(x+y)$.

Wyznaczyć równanie rodziny krzywych prostopadłych do rodziny:

37. parabol $ay = x^2$, **38.** hiperbol $xy = c$,
39. elips $x^2 + 4y^2 = a^2$, **40.** okręgów $x^2 + y^2 = 2ax$.

Odpowiedzi **37** $2y^2 + x^2 = c^2$; **38** $y^2 - x^2 = C$; **39** $y = Cx^4$; **40** $x^2 + y^2 = 2Cy$.

Równania różniczkowe liniowe

41. $y' - \frac{y}{x} = 2x, \quad y(1) = 3,$
42. $y' - y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0,$
43. $y' + 2\,y = e^{3x},$
44. $y' + 2x\,y = xe^{-x^2},$
45. $(1+x^2)\,y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2,$
46. $y' = \frac{y+1}{x},$
47. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x},$
48. $xy' + y = \ln x + 1,$
49. $y' + 2y = 4x,$
50. $y' - (x+2)\,y = x + 2,$
51. $(x^2+4)\,y' + 3xy = x,$
52. $y' - \frac{3y}{x} = x,$
53. $t^2\frac{ds}{dt} = 2ts - 3; \quad s(-1) = 1,$
54. $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x,$
55. $y' + y\cos x = \sin 2x,$
56. $t\;ds - 2s\;dt = t^3\ln t\;dt,$
57. $y' - y\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x,$
58. $(2x+1)\,y' + y = x,$
59. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1,$
60. $(a^2+x^2)\,y' + xy = 1.$

Odpowiedzi **41.** $y = 2x^2+x$; **42.** $y = \frac{x}{\cos x}$; **43.** $y = e^{-2\,x}\left(\frac{1}{5}e^{5\,x} + C\right)$ **44.** $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}$; **45.** $y = (x+C)\,(1+x^2)$; **46.** $y = Cx - 1$; **47.** $y = -\frac{1}{2x^2}e^{-x^2} + \frac{C}{x^2}$; **48.** $y = \ln x + \frac{C}{x}$; **49.** $y = 2x - 1 + C\;e^{-2x}$; **50.** $y = -1 + C\;e^{\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)}$; **51.** $y = \frac{1}{3} + \frac{C}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^3}$; **52.** $y = -x^2 + Cx^3$; **53.** $s = \frac{1}{t} + 2t^2$; **54.** $y = \frac{\sin^2 x + C}{\cos x}$; **55.** $y = 2\sin x - 2 + C\;e^{-\sin x}$; **56.** $s = t^3\ln t - t^3 + Ct^2$; **57.** $y = \frac{\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + C}{\cos x}$; **58.** $y = \frac{x-1}{3} + \frac{C}{\sqrt{2x+1}}$; **59.** $y = x^2 + C\;x^2e^{\frac{1}{x}}$; **60.** $y = \frac{\ln\left|C\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right|}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

Równania różniczkowe zupełne

61. $(3x^2+2y)\,dx + (2x-3)\,dy = 0,$
62. $(3x^2y - 4xy^2)\,dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3)\,dy = 0,$
63. $\left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right)dx + \frac{2y}{x}dy = 0,$
64. $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)\,dy = 0,$
65. $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})\,dy = 0,$
66. $yx^{y-1}dx + x^y\ln x dy = 0,$
67. $2x\cos^2 y dx + (2y - x^2\sin 2y)\,dy = 0,$
68. $(x\cos 2y + 1)\,dx - x^2\sin 2y dy = 0.$

Odpowiedzi. **61.** $x^3 + 2yx - 3y = C$; **62.** $x^3y - 2x^2y^2 + 3y^4 = C$; **63.** $y^2 + 4x^2 = Cx$; **64.** $x^3e^y - y = C$; **65.** $xe^{-y} + y = C$; **66.** $x^y = C$, **67.** $x^2\cos^2 y + y^2 = C$; **68.** $\frac{1}{2}x^2\cos 2y + x = C$.

Równania różniczkowe rzędu drugiego

69. $y'' = -y,\; y(0) = 0,\; y'(0) = 1;$
70. $y'' = -y,\; y(0) = 1,\; y'(0) = 0;$
71. $y'' = y,\; y(0) = 1,\; y'(0) = 0;$
72. $yy'' = \left(y'\right)^2;$
73. $y'' + 2y\left(y'\right)^3 = 0;$
74. $4y''\sqrt{y} = 1,\; y(0) = 1,\; y'(0) = -1;$

75. $(1+y^2)\,y'' = 2y\,(y')^2$;
76. $y''\frac{\cos y}{\sin y} = -2\,(y')^2$;
77. $yy'' - (y')^2 = y'$;
78. $\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad y(0) = \frac{1}{\alpha},\ y'(0) = 0$;
79. $xy'' - y' = e^x x^2$;
80. $y'' x \ln x = y'$;
81. $y'' + 2\,(y')^2\,x = 0$;
82. $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.

Odpowiedzi. **69.** $y = \sin x$; **70.** $y = \cos x$; **71.** $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$; **72.** $y = C_2 e^{C_1 x}$; **73.** $\frac{y^3}{3} + yC_1 = x + C_2$; **74.** $y = \sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{4}x\right)^4}$; **75.** $y = \operatorname{tg}\left(C_1 x + C_2\right)$; **76.** $\operatorname{tg} y = C_1 x + C_2$; **77.** $y = \frac{C_2}{C_1} e^{C_1 x} + \frac{1}{C_1}$; **78.** $y = \frac{1}{\alpha}\frac{e^{\alpha\, x}+e^{-\alpha\, x}}{2}$; **79.** $y = e^x\,(x-1) + x^2 C_1 + C_2$; **80.** $y = C_1 x\,(\ln x - 1) + C_2$; **81.** gdy $C_1 > 0$, $y = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2$, gdy $C_1 < 0$, $y = \frac{1}{2\sqrt{-C_1}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{-C_1}}{x+\sqrt{-C_1}}\right| + C_2$, gdy $C_1 = 0$ $y = C_2 - \frac{1}{x}$; **82.** $y = \frac{1}{x} + C_1 \ln|x| + C_2$.

10. Szeregi liczbowe, szeregi potęgowe

Korzystając z definicji zbadać zbieżność szeregu:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$,

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$, **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$,

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n$, **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{2^n}$.

Odpowiedzi.
1. rozbieżny, **2.** rozbieżny, **3.** zbieżny, **4.** zbieżny, **5.** zbieżny, **6.** rozbieżny, **7.** rozbieżny, **8.** rozbieżny.

Obliczyć sumę szeregu:

9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$,

11. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n+4^n}{6^n}$, **12.** $\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{11}} + \cdots$.

Odpowiedzi. **9.** $\frac{3}{2}$, **10.** $\frac{1}{3}$, **11.** $\frac{13}{2}$, **12.** $\frac{1}{24}$.

Zbadać zbieżność szeregu

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$, **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$,

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}$, **16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$,

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$, **18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$,

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, **20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$,

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$, **22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$.

Odpowiedzi. **13.** rozbieżny, **14.** rozbieżny, **15.** zbieżny, **16.** zbieżny, **17.** zbieżny (warunkowo zbieżny), **18.** zbieżny, **19.** rozbieżny, **20.** rozbieżny, **21.** zbieżny, **22.** zbieżny.

Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów:

23. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$,

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2n}$,

25. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x+1)^n$,

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^3}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}}$,

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} (x-1)^n$,

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{2n+1}}$,

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}$,

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-2)^n}{n}$,

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}$.

Odpowiedzi. **23.** $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$, **24.** $-2 \leq x < 0$, **25.** $-2 < x < 0$, **26.** $-2 \leq x \leq 0$, **27.** $-10 \leq x < 10$, **28.** $0 < x < 2$, **29.** $-3 \leq x < -1$, **30.** $-1 \leq x \leq 3$, **31.** $\frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2}$, **32.** $-3 \leq x < 3$.

Pokazać, że

33. $x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \ldots$;

34. $\frac{\sin x}{x} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$;

35. $\int e^{-x^2} dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \ldots$.

Obliczyć z dokładnością do trzech miejsc po przecinku

36. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$, :

37. $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}\, dx$,

38. $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$,

39. $\int_0^1 \sin \sqrt{x}\, dx$.

Odpowiedzi. **36.** $0,867$, **37.** $0,508$, **38.** $0,747$, **39.** $0,602$.

11. Analiza wektorowa

1. Znaleźć jednostkowy wektor normalny do powierzchni stożka opisanej równaniem $x^2 + y^2 = 2z^2$ w punkcie $(1,1,1)$.

2. Wyznaczyć jednostkowy wektor normalny do powierzchni opisanej równaniem $xyz = 1$ w punkcie $(1,1,1)$.

3. Wyznaczyć jednostkowe pole wektorowe normalne do powierzchni sfery o środku w początku układu i promieniu a i skierowane na zewnątrz.

4. Obliczyć div $\vec{A}$ oraz rot $\vec{A}$ dla $\vec{A} = xy^2\,\vec{i} + xyz\,\vec{j} + y^2z\,\vec{k}$.

5. Obliczyć div $\vec{A}$ oraz rot $\vec{A}$ dla $\vec{A} = \sin yz\,\vec{i} + \sin xz\,\vec{j} + \sin xy\,\vec{k}$.

6. Niech $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Wykazać, że $\nabla \cdot \vec{r} = 3$ oraz $\nabla \times \vec{r} = \vec{0}$ (o ile $\vec{r} \neq \vec{0}$).

7. Niech $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Wykazać, że grad $|\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ (o ile $\vec{r} \neq \vec{0}$).

8. Obliczyć $\int\limits_\Gamma \frac{y}{x}\,dl$, gdzie Γ jest łukiem paraboli $y = x^2$ zawartym między punktami $(1,1)$, $(2,4)$.

9. Obliczyć $\int\limits_\Gamma (x+y)dl$, gdzie Γ jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$.

10. Obliczyć $\int\limits_\Gamma xydl$, gdzie Γ jest obwodem prostokąta o wierzchołkach: $O = (0,0)$, $P = (4,0)$, $Q = (4,2)$, $R = (0,2)$.

11. Obliczyć $\int\limits_\Gamma \frac{z^2}{x^2+y^2}dl$, gdzie Γ jest pierwszym zwojem linii śrubowej: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = at$.

12. Obliczyć $\int\limits_\Gamma \big(y\,dy + x\,dx\big)$, gdzie Γ jest okręgiem $x^2 + y^2 = 1$ w kierunku dodatnim.

13. Obliczyć $\int\limits_\Gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right)$, gdzie Γ jest okręgiem $x^2+y^2 = 1$ w kierunku dodatnim.

14. Obliczyć $\int\limits_\Gamma \big(-y\,dx + x\,dy\big)$, gdzie Γ jest sparametryzowana równaniem $\vec{r}(t) = (t^2-1)\,\vec{i} + (t^3-t)\,\vec{j}$ dla $-1 \le t \le 1$.

15. Czy całka $\int\limits_\Gamma \big(2y+2)dx + 2xdy\big)$ zależy od drogi całkowania?

16. Obliczyć $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} \big((2y+2)dx + 2xdy\big)$.

17. Czy całka $\int\limits_\Gamma \big(yzdx + xzdy + xydz\big)$ zależy od drogi całkowania?

18. Sprawdzić twierdzenie Greena dla $\oint\limits_{\Gamma} ((x^2+y^2)dx + (x+2)dy)$, gdzie Γ jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

19. Sprawdzić twierdzenie Greena w przypadku całki $\oint\limits_{\Gamma} \big(xy\,dy - y^2\,dx\big)$, gdzie Γ jest okręgiem $x^2+y^2=4$ w kierunku dodatnim;

20. Stosując twierdzenie Greena obliczyć całkę $\oint\limits_{\Gamma} \big((xy+x+y)\,dx + (xy+x-y)\,dy\big)$, gdzie Γ jest brzegiem kwadratu o wierzchołkach $O=(0,0)$, $A=(1,0)$, $B=(1,1)$, $C=(0,1)$;

21. Stosując twierdzenie Greena obliczyć całkę $\oint\limits_{\Gamma} \left(\frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}\right)$, gdzie Γ jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A=(1,1)$, $B=(2,1)$, $C=(2,2)$.

22. Stosując twierdzenie Greena obliczyć całkę $\oint\limits_{\Gamma} \big((y-x^2)\,dx + (2x+y^2)\,dy\big)$, gdzie Γ jest brzegiem prostokąta o wierzchołkach $A=(1,1)$, $B=(4,1)$, $C=(4,3)$, $D=(1,3)$.

23. Pokazać, że $\oint\limits_{\Gamma} \big((x^3y+e^y)\,dx + (xy^3+xe^y-2y)\,dy\big) = 0$, gdzie Γ jest krzywą zamkniętą, symetryczną względem osi współrzędnych.

24. Obliczyć pole elipsy $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

25. Obliczyć pole pętli linii $x = t^2-1$, $y = t^3-t$.

26. Korzystając ze wzoru $|\Sigma| = \iint\limits_{\Sigma} dS$ obliczyć pole powierzchni bocznej walca o promieniu R i wysokości H.

27. Obliczyć $\iint\limits_{\Sigma} (6x+z-y^2)\ dS$ po powierzchni sparamatryzowanej równaniem $\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + u\vec{k}$ dla $0 \le u \le 1$ i $0 \le v \le 1$.

28. Obliczyć $\iint\limits_{\Sigma} x\ dS$ po tej części sfery $x^2+y^2+z^2=a^2$, która leży w pierwszej oktancie.

29. Obliczyć $\iint\limits_{\Sigma} \big(x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdx\big)$ po zewnętrznej stronie sfery $x^2+y^2+z^2=a^2$.

30. Za pomocą wzoru Gaussa obliczyć $\iint\limits_{\Sigma} \Big(x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy\Big)$ braną po zewnętrznej stronie ostosłupa utworzonego z płaszczyzn $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

31. Obliczyć $\int\limits_{\Gamma} \Big(xdx + (x+y)\,dy + (x+y+z)\,dz\Big)$, gdzie $\Gamma : \begin{cases} x = a\ \sin t, \\ y = a\ \cos t, \\ z = a\,(\sin t + \cos t)\,, \\ t \in [0, 2\pi]\,. \end{cases}$.

Odpowiedzi. **1.** $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 1,\ -2)$; **2.** $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1)$; **4.** $\operatorname{div} A = 2y^2 + xz$, $\operatorname{rot} A = (2yz - xy)\,\vec{i} + (yz - 2xy)\,\vec{k}$; **5.** $\operatorname{div} A = 0$, $\operatorname{rot} A = (x\cos xy - x\cos xz)\,\vec{i} - (y\cos xy - y\cos yz)\,\vec{j} + (z\cos xz - z\cos yz)\,\vec{k}$; **8.** $\frac{1}{12}\left(\sqrt{17^3} - \sqrt{5^3}\right)$; **9.** $1 + \sqrt{2}$; **10.** 24; **11** $\frac{\sqrt{2}a8\pi^3}{3}$; **12.** 0; **13.** 2π; **14.** $\frac{16}{15}$; **15.** nie; **16.** 4; **17.** nie; **18.** $\frac{1}{6}$ **19.** 0; **20.** 0; **21.** $\frac{1}{2}$; **22.** 6; **24.** πab **25.** $\frac{8}{15}$ **27.** $\sqrt{2}\ \frac{19}{6}$; **28.** $\frac{\pi a^3}{4}$; **29.** $4\pi a^3$; **30.** $\frac{a^4}{4}$; **31.** $-\pi a^2$.

12. Literatura

[1] G.N.Berman, *Zbiór zadań z analizy matematycznej,* PWN, Warszawa 1966.

[2] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna, Cz. 1-2*, Oficyna Wydawnicza GIS, Wrocław 2003.

[3] B. Gdowski, E. Pluciński, *Zbiór zadań z rachunku wektorowego i geometrii analitycznej,* Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.

[4] l Jeśmanowicz, J. Łoś *Zbiór zadań z algebry*, PWN, Warszawa 1969

[5] W.Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, Cz. I-II,* PWN, Warszawa 2001.

[6] D.A. McQuarrie, *Matematyka dla przyrodników i inżynierów*, PWM, Warszawa 2005.

[7] W.P.Minorski, *Zbiór zadań z matematyki wyższej,* WNT, Warszawa 1974.