

SPIS TREŚCI

1. Macierze, wyznaczniki, równania liniowe	2
2. Geometria analityczna	7
3. Granice, pochodne funkcji i ich zastosowania	10
4. Liczby zespolone	16
5. Całki nieoznaczone	18
6. Zastosowania geometryczne całek	20
7. Pochodne cząstkowe, różniczki zupełne i ich zastosowania	22
8. Całki podwójne	25
9. Równania różniczkowe zwyczajne	27
10. Szeregi liczbowe, szeregi potęgowe	30
11. Analiza wektorowa	32
12. Literatura	35

1. MACIERZE, WYZNACZNIKI, RÓWNANIA LINIOWE

1. Które z iloczynów AB , BA , A^2 , B^2 istnieją? Obliczyć te, które istnieją, jeżeli

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedź.

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 3 & 16 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 10 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$. Pozostałe iloczyny nie istnieją.

Obliczyć

2. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 3. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3$, 5. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3$.

Odpowiedzi. 2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, 4. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Czy dla macierzy A i B zawsze zachodzi $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Czy prawdą jest, że $(AB)^2 = A^2B^2$?

7. Wykazać, że macierz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ spełnia równanie:

$$x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = 0.$$

Obliczyć wyznaczniki:

8. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & 8 \end{vmatrix}$, 9. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, 10. $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$,

11. $\begin{vmatrix} \cos^2 x & 1 & \sin^2 x & 1 \\ \cos^2 y & 2 & \sin^2 y & 1 \\ \cos^2 z & 3 & \sin^2 z & 1 \\ \cos^2 t & 4 & \sin^2 t & 1 \end{vmatrix}$, 12. $\begin{vmatrix} a - b & m - n & r - s \\ b - c & n - p & s - t \\ c - a & p - m & t - r \end{vmatrix}$,

$$\mathbf{13.} \begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}, \quad \mathbf{14.} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Odpowiedzi. **8.** -126 ; **9.** 3 ; **10.** $a^4 - 3a^2 + 1$; **11.** 0 ; **12.** 0 ;
13. $1 + a + b + c$; **14.** $(a - b)(a - c)(b - c)$.

Pokazać, że

$$\mathbf{15.} \begin{vmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \frac{x_1-x_2}{2} & \frac{y_1-y_2}{2} & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{16.} \begin{vmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwiązać równania:

$$\mathbf{17.} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & x^3 \end{vmatrix} = 0. \quad \mathbf{18.} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 \\ x^2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0. \quad \mathbf{19.} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

$$\mathbf{20.} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3-x & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3-x & -1 \\ 4 & 4 & 4 & 5-x \end{vmatrix} = 0$$

Odpowiedzi. **17.** $-1, 0, 1$; **18.** $2, 3$; **19.** $-2, 1$; **20.** $0, 1$.

21. Pokazać, że macierz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ spełnia równanie

$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

Znaleźć A^{-1} , jeżeli:

$$\mathbf{22.} \quad A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{23.} \quad A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{24.} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{25.} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{26.} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{27.} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{28.} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{29.} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedzi. **22.** A^T ; **23.** A^T ; **24.** $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; **25.** $\begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

26. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; **27.** $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

28. $\begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$; **29.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

30. Macierz A spełnia równanie $A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Obliczyć $A^2 + A^{-2}$.

Rozwiązać równanie macierzowe:

31. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$,

32. $X \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

33. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

34. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + X$,

$$35. X \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}^T.$$

Odpowiedzi. **31.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, **32.** $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, **33.** $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$,

34. $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, **35.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

36. Dla jakiej wartości parametru a równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} a & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \text{ ma rozwiązanie?}$$

Rozwiązać podane układy Cramera:

$$37. \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}, \quad 38. \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 3 \\ -x + 2y - z = 2 \end{cases},$$

$$39. \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 3x + 4y - 5z = 0 \end{cases}, \quad 40. \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ -x + y + z + t = 2 \\ -x - y + z + t = 0 \\ -x - y - z + t = -2 \end{cases}.$$

Odpowiedzi. **27.** $x = 2, y = 2$; **38.** $x = 3, y = 2, z = -1$;
39. $x = y = z = 0$; **40.** $x = y = z = t = 1$.

Rozwiązać podane układy równań:

$$41. \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 2 \\ -x + 3y = 4 \end{cases}, \quad 42. \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 2 \\ -x + y = 4 \end{cases},$$

$$43. \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}, \quad 44. \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 6x - 3y = -9 \\ 4x - 2y = -6 \end{cases},$$

$$45. \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + 2y + z = 5 \end{cases}, \quad 46. \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + 2y + z = 6 \end{cases},$$

$$\begin{array}{ll}
47. \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 4y - 4z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \end{cases}, & 48. \begin{cases} 2x + y + z - t = 0 \\ x - 2y + z + 2t = 0 \\ 3x - y + 2z + t = 0 \end{cases}, \\
49. \begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0 \\ 3x + y + 3z - 2 = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}, & 50. \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}, \\
51. \begin{cases} x - y - z - t = -1 \\ 2x - y + 2z - t = 2 \\ x + 3z - 2t = 1 \\ 4x - 2y + 4z - 4t = 2 \end{cases}, & 52. \begin{cases} x - y - z - t = -1 \\ 2x - y + 2z - t = 2 \\ x + 3z = 3 \\ 4x - 2y + 4z - 2t = 4 \end{cases}, \\
53. \begin{cases} x + 2y + z - 3t = 1 \\ 2x - y + z + t = 2 \\ x + 2y + z - 3t = 3 \\ 2x - y + z + 3t = 5 \end{cases}, & 54. \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + z + 2t + v = 1 \end{cases}.
\end{array}$$

Odpowiedzi. **41.** $x = 2, y = 2$; **42.** układ sprzeczny; **43.** układ sprzeczny; **44.** $x = x, y = 2x + 3$ **45.** $x = -y + 2, y = y, z = 1$; **46.** układ sprzeczny; **47.** $x = -8z, y = 7z, z = z$; **48.** $x = x, y = -\frac{1}{3}x + t, z = -\frac{5}{3}x, t = t$; **49.** układ sprzeczny; **50.** $x = 1, y = 1, z = 1$; **51.** $x = -3z + 3, y = -4z + 3, z = z, t = 1$; **52.** $x = -3z + 3, y = y, z = z, t = 4 - 4z - y$; **53.** układ sprzeczny; **54.** $x = x, y = -x - z + 2, z = z, t = t, v = x - 1 - 2t$.

W zależności od parametru a podać warunki rozwiązalności układu:

$$\begin{array}{ll}
55. \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + ay + az = 2 \end{cases}, & 56. \begin{cases} x + y = ax \\ -x + y = ay \end{cases}, \\
57. \begin{cases} ax + 2y + 2z = -1 \\ 2x - ay - z = -1 \\ 2x + y - z = a \end{cases}, & 58. \begin{cases} a^2x + 4y + 9z = 2a \\ ax + 2y + 3z = a \\ x + y + z = 1 \end{cases},
\end{array}$$

Odpowiedzi. **55.** układ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $a \neq 1$, nie ma rozwiązań dla $a = 1$. **56.** układ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $a \in \mathbb{R}$. **57.** układ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $a \neq -1$ i $a \neq -4$, ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $a = -1$, nie ma rozwiązań dla $a = -4$; **58.** układ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $a \neq 2$ i $a \neq 3$, ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $a = 2$, nie ma rozwiązań dla $a = 3$.

2. GEOMETRIA ANALITYCZNA

1*. Pokazać, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoku.

2*. Pokazać, że przekątne równoległoboku przecinają się w połowie.

3. Dla jakich wartości parametrów m i k wektory $\vec{a} = (4, -3, 6k)$, $\vec{b} = (2m, 1, -4)$ są równoległe.

4. Znaleźć kąt między wektorami:

(a) $\vec{a} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{b} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

(b) $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (-\sqrt{2} + \sqrt{6}, \sqrt{2} + \sqrt{6})$,

(c) $\vec{a} = (1, -\sqrt{2}, 1)$, $\vec{b} = (-1, -\sqrt{2}, 1)$.

5. Dla jakiej wartości parametru λ wektory $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (\lambda, -2, 2 + \lambda)$ są wzajemnie prostopadłe?

6. Sprawdzić, czy trójkąt ABC

(a) $A = (5, 4)$, $B = (3, 2)$, $C = (2, -1)$,

(b) $A = (5, 4, 1)$, $B = (3, 3, 2)$, $C = (1, 6, -5)$,
jest prostokątny.

7. Znaleźć cosinusy kierunkowe wektora $\vec{a} = (1, -1, 2)$.

8. Znaleźć rzut prostokątny wektora $\vec{a} = (2, -1, 1)$ na oś o kierunku wektora $\vec{b} = (1, 2, 1)$.

9. Znaleźć wektor jednostkowy \vec{m} prostopadły do wektorów $\vec{a} = (2, -1, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, -1)$.

10. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach:

(a) $P = (3, 4, -3)$, $Q = (6, 2, 3)$, $R = (0, -1, 5)$,

(b) $P = (-2, 2)$, $Q = (4, -2)$, $R = (0, 3)$.

11*. Pokazać, że pole równoległoboku zbudowanego na przekątnych danego równoległoboku jest równa podwojonemu polu danego równoległoboku.

12*. Wyprowadzić twierdzenie sinusów. *Wskazówka:* Wykorzystać fakt, że warunkiem, aby niewspółinowe wektory \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} tworzyły trójkąt jest $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Następnie wykorzystać iloczyn wektorowy.

13. Obliczyć objętość równoległościanu o wierzchołkach $O = (0, 0, 0)$, $P = (3, 4, -3)$, $Q = (6, 2, 3)$, $R = (0, -1, 5)$.

14. Wykazać, że punkty $P = (1, 2, 1)$, $Q = (0, -1, 5)$, $R = (1, 1, 2)$, $S = (3, 1, 0)$ leżą w jednej płaszczyźnie i obliczyć pole czworoboku o wierzchołkach P, Q, R, S .

15. Wykazać, że punkty $P = (0, 1, 2)$, $Q = (3, 1, -1)$, $R = (4, 1, 0)$, $S = (-1, 1, 5)$ są wierzchołkami trapezu i policzyć jego wysokość.

16*. Wykazać, że objętość równoległościanu zbudowanego na przekątnych ścian danego równoległościanu jest równa podwojonej objętości danego równoległościanu.

17. Napisać równania prostej przechodzącej przez punkty:

- (a) $P = (1, -1, 1)$, $Q = (4, 1, 3)$,
 (b) $P = (1, -1)$, $Q = (4, 1)$.

18. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (2, -1, 2)$ i równoległej do prostej $l : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

19. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P = (-1, 1, 2)$ i równoległej do płaszczyzny $\pi : 2x - 3y + 4z - 7 = 0$.

20. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P = (3, -1, -1)$ i prostopadłej do prostej $l : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

21. Znaleźć odległość punktu $P = (3, -1, -1)$ do prostej $l : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

22. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez:

(a) punkty $P = (0, 0, 2)$, $Q = (4, 0, 1)$, $R = (2, 1, 2)$,

(b) prostą $l : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ i punkt $P = (2, -1, 0)$,

(c) proste $l_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$, $l_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = 4s \\ z = -2s \end{cases}$,

(d) proste $l_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$, $l_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 - 2s \\ z = -1 + 2s \end{cases}$.

23. Czy przez proste $l_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$, $l_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 - 2s \\ z = 5 + 2s \end{cases}$ można poprowadzić płaszczyznę?

24*. W zależności od parametru a podać wzajemne położenie prostych: $l_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + at \end{cases}$, $l_2 : \begin{cases} x = -a - s \\ y = 3 - as \\ z = 2 - s \end{cases}$.

25*. Dla jakich wartości parametrów A, B prosta $l : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 - 4t \\ z = -3 + t \end{cases}$ leży w płaszczyźnie $\pi : Ax + 2y - 4z + B = 0$.

26. Przedstawić prostą $l : \begin{cases} 3x - 2y + 5z = 1 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases}$ w postaci parametrycznej.

27. Na sferze danej wzorem $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ wyznacz współrzędne punktów najbliższych i najdalszych od punktu $(1, 3, 4)$.

Odpowiedzi. **3.** $k = 2$, $m = -\frac{2}{3}$; **4.** (a) $\frac{2}{3}\pi$, (b) $\frac{\pi}{6}$, (c) $\frac{\pi}{3}$; **5.** $\lambda = -\frac{1}{2}$; **6.** (a) nie; (b) tak. **7.** $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}$; **8.** $\frac{1}{6}(1, 2, 1)$; **9.** $\frac{\pm 1}{\sqrt{35}}(-1, 3, 5)$; **10.** (a) $\frac{49}{2}$; (b) 7 **13.** 63; **14.** $\frac{3}{2}\sqrt{3}$;

15. $\sqrt{2}$; **17.** (a) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$; **18.** $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

19. $2(x + 1) - 3(y - 1) + 4(z - 2) = 0$. **20.** **21.** $\sqrt{\frac{325}{17}}$. **22.** (a) $x - 2y + 4z - 8 = 0$; (b) $2x - y - 5 = 0$; (c) $-x + 3y + 5z = 0$; (d)

$2x - 3y - 4z - 3 = 0$. **23.** nie **25.** $A = 3, B = -23$. **26.** $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 4t \\ z = t \end{cases}$

27. $\pm \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}} \right)$.

3. GRANICE, POCHODNE FUNKCJI I ICH ZASTOSOWANIA

Znaleźć funkcje złożone $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$, $f \circ g$ dla:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 1 + x$;
2. $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$;
3. $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $g(x) = x^2$;
4. $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \frac{x}{x-2}$;
5. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \cos x$;
6. $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$;
7. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

Odpowiedzi. **1.** $(f \circ f)(x) = x$, $(g \circ g)(x) = x + 2$, $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x} + 1$, $(f \circ g)(x) = \frac{1}{1+x}$; **2.** $(f \circ f)(x) = x^4$, $(g \circ g)(x) = \cos(\cos x)$, $(g \circ f)(x) = \cos x^2$, $(f \circ g)(x) = \cos^2 x$; **3.** $(f \circ f)(x) = x$, $(g \circ g)(x) = x^4$, $(g \circ f)(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$, $(f \circ g)(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$; **4.** $(f \circ f)(x) = \frac{x}{2x+1}$, $(g \circ g)(x) = -\frac{x}{x-4}$, $(g \circ f)(x) = -\frac{x}{x+2}$, $(f \circ g)(x) = \frac{1}{2} \frac{x}{x-1}$; **5.** $(f \circ f)(x) = \sqrt[4]{x}$, $(g \circ g)(x) = \cos(\cos x)$, $(g \circ f)(x) = \cos \sqrt{x}$, $(f \circ g)(x) = \sqrt{\cos x}$; **6.** $(f \circ f)(x) = x^9$, $(g \circ g)(x) = \sqrt[9]{x}$, $(g \circ f)(x) = x$, $(f \circ g)(x) = x$; **7.** $(f \circ f)(x) = \frac{x+x^3}{1+3x^2+x^4}$, $(g \circ g)(x) = x$, $(g \circ f)(x) = \frac{1+x^2}{x}$, $(f \circ g)(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Niech $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$. Funkcję h przestawić za pomocą złożenia funkcji f i g .

- 8.** $h(x) = x^2 + 1$, **9.** $h(x) = (x + 1)^2$, **10.** $h(x) = (x^2 + 1)^2$,
- 11.** $h(x) = x + 2$, **12.** $h(x) = (x + 2)^2$, **13.** $h(x) = x^4$.

Odpowiedzi. **8.** $h(x) = (g \circ f)(x)$; **9.** $h(x) = (f \circ g)(x)$; **10.** $h(x) = (f \circ g \circ f)(x)$; **11.** $h(x) = (g \circ g)(x)$; **12.** $h(x) = (f \circ g \circ g)(x)$; **13.** $h(x) = (f \circ f)(x)$.

Obliczyć:

- 14.** $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; **15.** $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$;
- 16.** $\arctg(-1)$; **17.** $\arctg \sqrt{3}$;
- 18.** $\arcsin \left(\sin \frac{15\pi}{7}\right)$; **19.** $\arccos \left(\sin \frac{15\pi}{7}\right)$.

Odpowiedzi. **14.** $\frac{\pi}{3}$; **15.** $-\frac{\pi}{6}$; **16.** $-\frac{\pi}{4}$; **17.** $\frac{\pi}{3}$; **18.** $\frac{\pi}{7}$; **19.** $\frac{5\pi}{14}$.

20. Rozwiązać równanie $\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{2}$.

Odpowiedź. $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Obliczyć granice

21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{3-n^3}$,
 22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3n+1}{\sqrt{n^4+1}}$,
 23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$,
 24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{n^2}$,
 25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3n}}$,
 26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{5n-1}$,
 27. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{5n-1}$,
 28. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-0,7)^n}{5n-1}$,
 29. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+(-1)^n}{3n}$,
 30. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+2}}$,
 31. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n-5^n}{4^n+7^n}$,
 32. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n}}$,
 33. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2+7n}-2n)$,
 34. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1}-n)$,
 35. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-\sqrt{n^2-n+1})$,
 36. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n(n-\sqrt{n^2-a}))$,
 37. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b})$,
 38. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n-5}-n\sqrt{2})$,
 39. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-n})$,
 40. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{n})^{3n-2}$,
 41. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{2n})^n$,
 42. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2}$,
 43. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}-1\right)^n$,
 44. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$,
 45. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$,
 46. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{3(x+3)^2}$,
 47. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)\sqrt{x-1}}{x-2}$,
 48. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2}$,
 49. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-\sqrt{x^2+a^2})$,
 50. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-\sqrt{x^2+a^2})$,
 51. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x^2+1}}}{e^x}$,
 52. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x-5^x}{4^x+7^x}$,
 53. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$,
 54. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$,
 55. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,
 56. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$,
 57. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$,
 58. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$,
 59. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$,
 60. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{3x}$,
 61. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin x}$,
 62. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$,
 63. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$,
 64. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$,
 65. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$,
 66. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$,
 67. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x}$,
 68. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{2}{x})^{3x}$,
 69. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+1}\right)^{2x}$,
 70. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+2)-\ln x)$,
 71. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)$,
 72. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$.

Odpowiedzi. 21. 0; 22. 2; 23. 1; 24. 1; 25. $\frac{4}{3}$; 26. 0; 27. 0; 28. 0;
 29. 2; 30. -1; 31. 0; 32. 1; 33. $\frac{7}{4}$; 34. 0; 35. $\frac{1}{2}$; 36. $\frac{a}{2}$; 37. 0; 38. $-\infty$;
 39. $+\infty$; 40. e^3 ; 41. \sqrt{e} ; 42. $\frac{1}{e}$; 43. nie istnieje; 44. 0; 45. ∞ ;
 46. $-\frac{1}{18}$; 47. 4; 48. 1; 49. 0; 50. $-\infty$; 51. 1; 52. 1; 53. $+\infty$;

53. 1; **54.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; **55.** -1 ; **56.** $\frac{1}{2}$; **57.** 3; **58.** 3; **59.** 1; **60.** $\frac{2}{3}$; **61.** 5;
62. $-\frac{1}{4}$; **63.** $\frac{1}{2}$; **64.** $6\sqrt{2}$; **65.** 1; **66.** 3; **67.** 0; **68.** e^6 ; **69.** $e^{\frac{2}{3}}$; **70.** 2;
71. 1; **72.** $\frac{1}{2}$.

Korzystając z definicji wyprowadzić wzór na pochodną funkcji:

$$\mathbf{73.} f(x) = 3x, \quad \mathbf{74.} f(x) = x^2 + 1, \quad \mathbf{75.} f(x) = \frac{1}{2x},$$

$$\mathbf{76.} f(x) = \frac{1}{x+5}, \quad \mathbf{77.} f(x) = \sqrt{3x},$$

$$\mathbf{78.} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \mathbf{79.} f(x) = \frac{1}{x^2+3}.$$

Wyznaczyć pochodne podanych funkcji:

$$\mathbf{80.} f(x) = (2x + 1)^2,$$

$$\mathbf{81.} f(x) = \frac{1}{10x^5},$$

$$\mathbf{82.} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x},$$

$$\mathbf{83.} f(x) = \frac{x}{2x-1},$$

$$\mathbf{84.} f(x) = \sqrt{x^2 + 5},$$

$$\mathbf{85.} f(x) = x\sqrt{x^2 + 5},$$

$$\mathbf{86.} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}},$$

$$\mathbf{87.} f(x) = \arcsin x + \sqrt{1-x^2},$$

$$\mathbf{88.} f(x) = e^{x^2},$$

$$\mathbf{89.} f(x) = e^{\sin x},$$

$$\mathbf{90.} f(x) = e^{\sqrt{\sin x}},$$

$$\mathbf{91.} f(x) = \ln \cos x,$$

$$\mathbf{92.} f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x},$$

$$\mathbf{93.} f(x) = \ln \sqrt{1+x^2} - x \arctg x,$$

$$\mathbf{94.} f(x) = \arctg \frac{1}{x},$$

$$\mathbf{95.} f(x) = \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3},$$

$$\mathbf{96.} f(x) = \arcsin \frac{1}{x^2} + \ln^5 x,$$

$$\mathbf{97.} f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + k}),$$

$$\mathbf{98.} f(x) = x(\sin \ln x + \cos \ln x). \quad \mathbf{99.} f(x) = e^{2x}(x+3).$$

Odpowiedzi. **80.** $f'(x) = 8x + 4$; **81.** $f'(x) = \frac{-1}{2x^6}$; **82.** $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; **83.** $f'(x) = -\frac{1}{(2x-1)^2}$; **84.** $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$; **85.** $f'(x) = \frac{5+2x^2}{\sqrt{x^2+5}}$;
86. $f'(x) = \frac{5}{(\sqrt{x^2+5})^3}$; **87.** $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$; **88.** $f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$; **89.** $f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$; **90.** $f'(x) = e^{\sqrt{\sin x}} \cdot \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$; **91.** $f'(x) = -\operatorname{tg} x$; **92.** $f'(x) = \frac{2}{x^2-1}$; **93.** $f'(x) = -\arctg x$; **94.** $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$; **95.** $f'(x) = 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3}$;
 $\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{3}$ **96.** $f'(x) = \frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}} + 5 \frac{\ln^4 x}{x}$ **97.** $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$ **98.** $f'(x) = 2 \cos \ln x$ **99.** $f'(x) = e^{2x}(2x+7)$.

100. $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{x}$; obliczyć $f'(5)$. Odpowiedź. $\frac{1}{15}$.

101. $y = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$; wyznaczyć $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Odpowiedź. $\frac{dy}{dx} = e^{2x} - e^{-2x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2(e^{2x} + e^{-2x})$;

102. $y = x \cdot \ln \frac{1}{x}$; wyznaczyć $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Odpowiedź. $\frac{dy}{dx} = -(\ln x + 1)$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x}$.

103. $f(x) = \ln(1+x^2)$; obliczyć $f(0)$, $f'(0)$ i $f''(0)$.

Odpowiedź. $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$.

104. Wykazać, że funkcja $y = \frac{1}{3} \cdot \arctg \frac{x}{3}$ spełnia równanie różniczkowe $y'' + 2(y')^2 x = 0$.

105. Wykazać, że funkcja $y = e^x \cos x$ spełnia równanie różniczkowe $y^{IV} + 4y = 0$.

106. Napisać równanie stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

- (a) $f(x) = x^2 - 1, (0, f(0))$;
- (b) $f(x) = x^2 - 1, (1, f(1))$;
- (c) $f(x) = x^2 - 1, (-1, f(-1))$;
- (d) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, (0, f(0))$;
- (e) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, (1, f(1))$;
- (f) $f(x) = \arctg \frac{1}{x}, (1, f(1))$;
- (g) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}, (0, f(0))$;
- (h) $f(x) = \arctg \frac{1-x}{1+x}, (0, f(0))$.

Odpowiedzi. (a) $y = -1$; (b) $y = 2x - 2$; (c) $y = -2x - 2$; (d) $y = 2x$;
(e) $y = 1$; (f) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$; (g) $y = 2x$; (h) $y = -x + \frac{\pi}{4}$.

107. Na krzywej $y = x^2(x-2)^2$ znaleźć punkty, w których styczne są równoległe do osi Ox .

108. Obliczyć Δf i df dla:

- (a) $f(x) = x^2 - x$ przy $x = 10$ i $\Delta x = 0,1$;
- (b) $f(x) = x^3 + 2x$ przy $x = 2$ i $\Delta x = 0,1$;
- (c) $f(x) = \sqrt{x}$ przy $x = 4$ i $\Delta x = 0,2025$.

Odpowiedzi. (a) $\Delta f = 1,91$ $df = 1,9$; (b) $\Delta f = 1,461$ i $df = 1,4$; (c) $\Delta f = 0,05$, $df = 0,050625$.

109. Przy pomocy różniczki obliczyć wartość przybliżoną.

- (a) $\arctg 1,03$; (b) $\sqrt[3]{63}$; (c) $\sin 31^\circ$; (d) $\ln 0,99$.

Odpowiedzi. (a) 0,8004; (b) 3,9792; (c) 0,51511; (d) -0,01.

Za pomocą reguły de L'Hospitala obliczyć granice:

- 110.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$; **111.** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin x - \cos x}$;
- 112.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x^2}$; **113.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2^x + 1)}{x}$;
- 114.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}$; **115.** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \operatorname{tg} x}$;

$$\begin{array}{ll}
116. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}; & 117. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}; \\
118. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}; & 119. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arcsin x}{2x + \arctg x}; \\
120. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x; & 121. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}; \\
122. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right); & 123. \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (1 + x); \\
124. \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x; & 125. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x; \\
126. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}, & 127. \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}; \\
128. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{2x}}; & 129. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)^{\operatorname{tg} x}.
\end{array}$$

Odpowiedzi. **110.** 0; **111.** $\sqrt{2}$; **112.** $-\frac{1}{2}$; **113.** $\ln 2$; **114.** 0; **115.** 1; **116.** $a - b$ **117.** $\frac{1}{e}$; **118.** $-\frac{1}{2}$; **119.** $\frac{1}{3}$; **120.** 0; **121.** ∞ **122.** 1; **123.** 0; **124.** $\frac{2}{\pi}$; **125.** 1; **126.** e^{-1} ; **127.** e^3 ; **128.** \sqrt{e} ; **129.** 1.

130. Uzasadnić podane tożsamości:

- (a) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ dla $x > 0$,
- (b) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ dla $x < 0$,
- (c) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1-x}{1+x}$ dla $x \in (-1, \infty)$,
- (d) $\operatorname{arc} \sin \frac{2x}{1+x^2} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ dla $x \in (-1, 1)$.

Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema podanych funkcji:

$$\begin{array}{ll}
131. f(x) = e^{-x^2}, & 132. f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \\
133. f(x) = \frac{x}{1+x^2}, & 134. f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}, \\
135. f(x) = x + \frac{1}{x}, & 136. f(x) = \frac{1}{e^x - 1}, \\
137. f(x) = x + \frac{4}{x-5}, & 138. f(x) = \frac{x}{4-x^2}, \\
139. f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}, & 140. f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}), \\
141. f(x) = x\sqrt{2-x^2}, & 142. f(x) = x^2\sqrt{2-x^2}, \\
143. f(x) = x \ln x, & 144. f(x) = \frac{x}{\ln x}.
\end{array}$$

Odpowiedzi. **131.** \searrow w $(0, +\infty)$, \nearrow w $(-\infty, 0)$; 0, maksimum; **132.** \searrow w $(0, +\infty)$, \nearrow w $(-\infty, 0)$; 0, maksimum; **133.** \searrow w $(-\infty, -1)$; $(1, +\infty)$, \nearrow w $(-1, 1)$; -1 minimum, 1-maksimum; **134.** \searrow w $(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$, i $(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$, \nearrow w $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$, i $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, minima, 0, maksimum **135.** \searrow w $(-1, 0)$ i $(0, 1)$, \nearrow w $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$; -1 maksimum, 1 minimum; **136.** \searrow w $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$, brak ekstremów; **137.** \searrow w $(3, 5)$ i $(5, 7)$ \nearrow w $(-\infty, 3)$ i $(7, +\infty)$; 3 maksimum, 7 minimum; **138.** \nearrow w $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ i $(2, +\infty)$; brak ekstremów; **139.** \searrow w $(-\infty, -3)$ i $(3, +\infty)$, \nearrow w $(-3, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ i $(\sqrt{3}, 3)$; -3 maksimum, 3 minimum; **140.** funkcja rosnąca; brak ekstremów; **141.** \searrow w $(-\sqrt{2}, -1)$ i $(1, \sqrt{2})$, \nearrow w $(-1, 1)$; -1 minimum, 1 maksimum; **142.** \searrow w $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$ i $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{2})$, \nearrow w $(-\sqrt{2}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$

i $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$; $-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$ maksima; **143.** \searrow w $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, \nearrow w $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$; $\frac{1}{e}$ minimum; **144.** \searrow w $(0, 1)$ i $(1, e)$, \nearrow w $(e, +\infty)$; e minimum.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość podanych funkcji we wskazanych przedziałach.

145. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$, $[-4, 4]$;

146. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $[0, 4]$.

147. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$, $[-1, 1]$.

Odpowiedzi. **145.** największa 76, najmniejsza -5 ; **146.** największa 4, najmniejsza 0. **147.** największa 2, najmniejsza -12 ;

148. Liczbę 2 rozbić na sumę dwóch składników dodatnich, tak aby ich iloczyn był największy.

149. Ile razy objętość kuli jest większa od objętości największego walca wpisanego w tę kulę?

Odpowiedź. $\sqrt{3}$.

150. Z koła wycięto wycinek o kącie α , a następnie zwinięto go tworząc powierzchnię stożka. Dla jakiej wartości kąta α objętość stożka będzie największa?

Odpowiedź. $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. LICZBY ZESPOLONE

Pokazać, że

1. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
2. $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$,
3. $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$,
4. z jest liczbą rzeczywistą $\Leftrightarrow z = \overline{z}$.

Obliczyć:

- | | |
|---|--|
| 5. $(2 + i)(2 - i)$, | 6. $(2 + i)^2$, |
| 7. $\frac{1}{1-i}$, | 8. $\frac{1-i}{1+i}$, |
| 9. $\frac{1}{(1-i)^2}$, | 10. $(1 - i)^{10}$, |
| 11. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$, | 12. $\left(\frac{2+i}{3-i}\right)^4$, |
| 13. $\operatorname{Re} \frac{3+i}{1-i}$, | 14. $\operatorname{Im} \left(\frac{1}{3+i} - \frac{1}{3-i}\right)$, |
| 15. $\sum_{k=0}^5 i^k$, | 16. $i + i^{22} + i^{23} + i^{24} + i^{25}$. |

17. Niech $z = \frac{3+i}{1-3i}$. Obliczyć $\operatorname{Re} \left(z + \frac{1}{z}\right)$ oraz $\operatorname{Im} \left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Odpowiedzi. **5.** 5; **6.** $3 + 4i$; **7.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; **8.** $-i$; **9.** $\frac{1}{2}i$; **10.** $-2^5 i$;
11. 1; **12.** $-\frac{1}{4}$; **13.** 1; **14.** $-\frac{1}{5}$; **15.** $1 + i$; **16.** i ; **17.** 0, 0.

18. Niech $\frac{b_1 + \alpha X i}{b_3} = \frac{b_2}{b_4 - \frac{1}{\alpha C} i}$, gdzie $b_1, b_2, b_3, b_4, \alpha, X$ i C są liczbami rzeczywistymi. Pokazać, że $X = \frac{C b_2 b_3}{\alpha^2 C^2 b_4^2 + 1}$.

19. Niech $(a + bi)^2 = z$. Znaleźć $\sqrt{-z}$, $\sqrt{\overline{z}}$, $\sqrt{-\overline{z}}$.

Rozwiązać równania:

20. $z^2 - 2z + 2 = 0$,
21. $z^2 - 2z + 4 = 0$,
22. $z^2 - iz + 2 = 0$,
23. $z^2 + 2(1 + i)z + 2i = 0$,
24. $i z^2 - (4 - 5i)z - 10 = 0$,
25. $z^2 - 2(3 + 5i)z + 30i = 0$,
26. $(3 - i)z^2 - 2(2 - 3i)z - 4i = 0$.
27. $z^3 + 1 = 0$,
28. $z^3 - i = 0$.

Odpowiedzi. **19.** $1 \pm i$, **21.** $1 \pm i\sqrt{3}$, **22.** $2i, -i$; **23.** $-1 - i$;
24. $-4 - 2i, -1 - 2i$; **25.** $3 + i, 3 + 9i$; **26.** $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i, 1 - i$. **27.** $-1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, **28.** $-i, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

29. Liczby zespolone u i v spełniają warunki $u^3 = v^3$. Czy $u = v$?
 Odpowiedź uzasadnić.

Następujące liczby przedstawić w postaci trygonometrycznej:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{30.} & z = -3 + i\sqrt{3}, \\ \mathbf{31.} & z = 2 - 2i, \\ \mathbf{32.} & z = -1 - i\sqrt{3}, \\ \mathbf{33.} & z = 1 - i \operatorname{ctg} \alpha, \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \end{array}$$

Odpowiedzi. **30.** $2\sqrt{3} \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi\right)$; **31.** $2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi\right)$; **32.** $2 \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right)$; **33.** $\frac{1}{\sin \alpha} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\right)$.

Obliczyć

$$\begin{array}{ll} \mathbf{34.} & \left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^7, \\ \mathbf{35.} & \left(-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^7, \\ \mathbf{36.} & |(1+i)^6|, \\ \mathbf{37.} & \left|\frac{i}{3+2i}\right|, \\ \mathbf{38.} & \left|\frac{(1-i)^3}{(3+2i)^2}\right|, \\ \mathbf{39.} & \sqrt{3+4i}, \\ \mathbf{40.} & \sqrt{i}, \\ \mathbf{41.} & \sqrt[4]{-1}, \\ \mathbf{42.} & \sqrt[3]{1}, \\ \mathbf{43.} & \sqrt[3]{-i}, \\ \mathbf{44.} & \sqrt[6]{64}, \\ \mathbf{45.} & \sqrt[6]{-1}. \\ \mathbf{46.} & \sqrt[4]{(3+4i)^4}, \\ \mathbf{47.} & \sqrt[5]{1}. \end{array}$$

Odpowiedzi. **34.** -1 ; **35.** 1 ; **36.** 2^3 ; **37.** $\frac{1}{\sqrt{13}}$; **38.** $\frac{2\sqrt{2}}{13}$; **39.** $\pm(2+i)$; **40.** $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; **41.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$; **42.** $1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; **43.** $i, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$; **44.** $\pm 2, \pm 1 \pm i\sqrt{3}$; **45.** $\pm i, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$; **46.** $\pm(3+4i), \pm(4-3i)$; **47.** $1, \frac{-(\sqrt{5}+1) \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \frac{(\sqrt{5}-1) \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Czy wzory

$$\begin{array}{l} \mathbf{48.} \quad (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha - i \sin n\alpha; \\ \mathbf{49.} \quad (-\cos \alpha + i \sin \alpha)^{2n+1} = -\cos(2n+1)\alpha + i \sin(2n+1)\alpha; \\ \mathbf{50.} \quad (-\cos \alpha - i \sin \alpha)^{2n+1} = -\cos(2n+1)\alpha - i \sin(2n+1)\alpha; \end{array}$$

są prawdziwe? Odpowiedź uzasadnić.

Podane wielomiany rzeczywiste przedstawić w postaci iloczynu nierozkładalnych czynników rzeczywistych:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{51.} & x^6 - 1, \\ \mathbf{52.} & x^6 + 1, \\ \mathbf{53.} & x^4 + x^2 + 1, \\ \mathbf{54.} & x^4 - x^2 + 1. \end{array}$$

Odpowiedzi. **51.** $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$; **52.** $(x^2+1)(x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1)$; **53.** $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$; **54.** $(x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1)$.

5. CAŁKI NIEOZNACZONE

Obliczyć całki

1. $\int (x^2 + 2x + \frac{1}{x}) dx$;
2. $\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) dx$;
3. $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$;
4. $\int (\operatorname{tg} x)^2 dx$;
5. $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$;
6. $\int \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$;
7. $\int e^x \sin e^x dx$;
8. $\int e^x \sqrt{e^x} dx$;
9. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$;
10. $\int e^{\cos x} \sin x dx$;
11. $\int \frac{\ln x}{x} dx$;
12. $\int \frac{dx}{x \ln x}$;
13. $\int \frac{dx}{x(3+\ln x)}$;
14. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$;
15. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$;
16. $\int x \sqrt{3-x^2} dx$;
17. $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^2}} dx$;
18. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$;
19. $\int \operatorname{tg} x dx$;
20. $\int \sqrt[5]{\sin x} \cos x dx$;
21. $\int \sin^5 x \cos x dx$;
22. $\int \cos^3 x dx$;
23. $\int x e^x dx$;
24. $\int \ln x dx$;
25. $\int x \cos x dx$;
26. $\int \arccos x dx$;
27. $\int \arccos x dx$;
28. $\int \ln \sqrt{x} dx$;
29. $\int e^{\sqrt{x}} dx$;
30. $\int \cos \sqrt{x} dx$;
31. $\int \frac{x}{x^2+1} dx$;
31. $\int \frac{x^2 dx}{x^2+1}$;
33. $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$;
34. $\int \frac{x^2}{x-2} dx$;
35. $\int \frac{x^2+4}{x^2+3} dx$;
36. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$;
37. $\int \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1} dx$;
38. $\int \frac{2x+3}{(x+2)(x-1)} dx$;
39. $\int \frac{dx}{x^2-4}$;
40. $\int \frac{2x^2-2x+1}{x(x-1)^2} dx$;
41. $\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$;
42. $\int \frac{x^2}{x^3-1} dx$;
43. $\int \frac{x}{x^4+1} dx$;
44. $\int \sin^2 x dx$;
45. $\int \cos^2 x dx$;
46. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$;
47. $\int x \operatorname{tg}^2 x dx$;
48. $\int \frac{dx}{e^x-1}$;
49. $\int \sqrt{e^x-1} dx$;
50. $\int \ln(x + \sqrt{x^2+2}) dx$;
51. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx$;
52. $\int \arccos \sqrt{x} dx$;
53. $\int x \arccos \frac{1}{x} dx$;
54. $\int \frac{\arccos x}{x^2} dx$;
55. $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$;
56. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$;
57. $\int \sqrt{1-\sin x} dx$;
58. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;
59. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$;
60. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$.

Odpowiedzi. **1.** $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \ln|x| + C$; **2.** $\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$; **3.** $\frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 + \frac{3}{4}(\sqrt[3]{x})^4 + C$; **4.** $\operatorname{tg} x - x + C$; **5.** $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$; **6.** $\frac{1}{4}(\arcsin x)^4 + C$; **7.** $-\cos(e^x) + C$; **8.** $\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x} + C$; **9.** $\frac{2}{3} \left(\sqrt{(1+\ln x)} \right)^3 + C$; **10.** $-e^{\cos x} + C$; **11.** $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$; **12.** $\ln|\ln x| + C$; **13.** $\ln|3+\ln x| + C$; **14.** $2e^{\sqrt{x}} + C$; **15.** $2 \sin \sqrt{x} + C$; **16.** $-\frac{1}{3}(3-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$; **17.**

- $-\sqrt{3-x^2}+C$; **18.** $2\sin^{\frac{1}{2}}x+C$; **19.** $-\ln|\cos x|+C$; **20.** $\frac{5}{6}\sin^{\frac{6}{5}}x+C$;
21. $\frac{1}{6}(\sin x)^6+C$; **22.** $\sin x-\frac{1}{3}(\sin x)^3+C$; **23.** xe^x-e^x+C ; **24.**
 $x\ln x-x+C$; **25.** $\cos x+x\sin x+C$; **26.** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$; **27.**
 $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$; **28.** $x\ln\sqrt{x}-\frac{1}{2}x+C$; **29.** $2(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}})+C$;
30. $2(\cos\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\sqrt{x})+C$; **31.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$;
32. $x-\operatorname{arctg} x+C$; **33.** $\frac{1}{3}x^3-x+\operatorname{arctg} x+C$; **34.** $\frac{1}{2}x^2+2x+4\ln|x-2|+C$;
35. $x+\frac{1}{3}\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}x\sqrt{3}+C$; **36.** $\ln(x^2+x+1)+C$;
37. $x+\ln(x^2+x+1)+C$; **38.** $\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{5}{3}\ln|x-1|+C$;
39. $\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+C$; **40.** $\ln x+\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}+C$;
41. $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2x-2}+C$; **42.** $\frac{1}{3}\ln|x^3-1|+C$; **43.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+C$;
44. $-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x+C$. **45.** $\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x+C$. **46.** $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C$;
47. $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C$; **48.** $\ln|e^x-1|-x+C$;
49. $2\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C$; **50.** $x\ln(x+\sqrt{x^2+2})-\sqrt{x^2+2}+C$;
51. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$; **52.** $x\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$;
53. $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C$; **54.** $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{\operatorname{arctg} x}{x}+C$; **55.** $\ln x-\ln(x+1)-\frac{\ln(x+1)}{x}$;
56. $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; **57.** $\pm 2\sqrt{1+\sin x}+C$;
58. $2\arcsin\sqrt{x}+C$, **59.** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C$. **60.** $\frac{\cos^2 x+1}{\cos x}+C$.

6. ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE CAŁEK

Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi

- | | |
|--|--|
| 1. $y = 2x - x^2, y = 0$ | 2. $y = x^2 - 4, y = 0$; |
| 3. $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3), y = 0$; | 4. $y = x^2, y = x^4$; |
| 5. $y = 2x, y = 3 - x^2$; | 6. $y = -x^2 + 4, y = x^2 - 2x$; |
| 7. $y = 1 - x^2, y = -x - 5$; | 8. $y = x^2 - 1, y = x^2 + 2, y = 3$; |
| 9. $y = \frac{x^2}{4}, y = x - 1, x = 0$; | 10. $y = x^2 - 2x, y = -x^2 + 4x$; |
| 11. $y = x - x^2\sqrt{x}, y = 0$; | 12. $y = x^3, y = x$; |
| 13. $y = 2 - x^2, y^3 = x^2$; | 14. $y^2 = x, x = 4$; |
| 15. $y = x^2, y^2 = x$; | 16. $y = \frac{1}{x}, y = \frac{4}{x}, y = 1, y = 4$; |
| 17. $xy = 4, x + y = 5$; | 18. $y = e^x, y = e, x = 0$; |
| 19. $y = e^x, y = e^{-x}, y = e$; | 20. $y = x\sqrt{4 - x^2}, y = 0$; |
| 21. $y = \sqrt{2 - x^2}, y = 0$; | 22. $y = \frac{x}{1+x^2}, y = 0, x = -1, x = 1$; |
| 23. $y = x \ln x, y = 0$; | 24. $y = x \ln x, y = x$. |

Odpowiedzi. 1. $\frac{4}{3}$, 2. $\frac{32}{3}$, 3. $\frac{1}{2}$, 4. $\frac{4}{15}$, 5. $\frac{32}{3}$, 6. 9, 7. $\frac{125}{6}$, 8. $\frac{28}{3}$, 9. $\frac{2}{3}$, 10. 9, 11. $\frac{3}{14}$, 12. $\frac{1}{2}$, 13. $\frac{32}{15}$, 14. $\frac{32}{3}$, 15. $\frac{1}{3}$, 16. $6 \ln 2$, 17. $\frac{15}{2} - 8 \ln 2$, 18. 1, 19. 2, 20. $\frac{16}{3}$, 21. π , 22. $\ln 2$, 23. $\frac{1}{4}$, 24. $\frac{1}{4}e^2$.

Obliczyć długość łuku krzywej

25. $y = \frac{x-1}{3}$, gdzie $0 \leq x \leq 1$;
 26. $y = 1 + \sqrt{2 - x^2}$;
 27. $y = 2x\sqrt{x}$, gdzie $0 \leq x \leq 11$;
 28. $y = \arctg \frac{1}{\sqrt{x}} + \arctg \sqrt{x}$, gdzie $1 \leq x \leq 2$;
 29. $y = 2x + \arctg 2x + \arctg \frac{1-2x}{1+2x}$, gdzie $1 \leq x \leq 2$;
 30. $y = \sqrt{x(1-x)} - \arccos \sqrt{1-x}$;
 31. $y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin \sqrt{x}$;
 32. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, gdzie $0 \leq x \leq 1$;
 33. $y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}$, gdzie $1 \leq x \leq 2$;
 34. $y = \ln(5 - 5x^2)$, gdzie $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Odpowiedzi. 25. $\frac{\sqrt{10}}{3}$, 26. $\pi\sqrt{2}$, 27. 74, 28. 1, 29. $\sqrt{5}$, 30. 2, 31. 2, 32. $\frac{1}{2}(e - e^{-1})$, 33. $\frac{779}{240}$, 34. $\ln 3 - \frac{1}{2}$.

Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót dookoła osi Ox krzywych

- | | |
|--|----------------------------------|
| 35. $y = 2x$, gdzie $0 \leq x \leq 2$; | 36. $y = x^2, y^2 = x$; |
| 37. $y = \sqrt{9 - x^2}, y = 0$; | 38. $(x - 1)^2 + y^2 = 4$; |
| 39. $y = x^2 - 2x - 3, y = 0$; | 40. $x^2 + y^2 - 20y + 75 = 0$. |

Odpowiedzi. **35.** $\frac{32}{3}\pi$, **36.** $\pi\frac{3}{10}$, **37.** 36π , **38.** $\frac{32}{3}\pi$, **39.** $\pi\frac{512}{15}$, **40.** $500\pi^2$.

Obliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót dookoła osi Ox krzywej

41. $y = 2x$, gdzie $0 \leq x \leq 2$;

42. $y = \sqrt{9 - x^2}$;

43. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, gdzie $0 \leq x \leq 2$;

44. $y = \sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{3}x\right)$, gdzie $1 \leq x \leq 2$;

45. $x^2 + y^2 - 20y + 75 = 0$.

46. $y = \arctg x + \arctg \frac{1-x}{1+x}$, gdzie $1 \leq x \leq 2$.

Odpowiedzi. **41.** $8\sqrt{5}\pi$; **42.** 36π ; **43.** $\frac{1}{2}\pi \left(\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^{-4} + 4\right)$; **44.** $\frac{11}{9}\pi$; **45.** $200\pi^2$; **46.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$.

7. POCHODNE CZĄSTKOWE, RÓŻNICZKI ZUPEŁNE I ICH
ZASTOSOWANIA

1. Pokazać, że funkcja $z(x, y) = x^y$ spełnia równanie

$$\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

2. Pokazać, że funkcja $z(x, y) = y + F(x^2 - y^2)$ spełnia równanie

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x \text{ dla}$$

a) $F(u) = \sin u$ b) $F(u) = \arctg u$.

3. Pokazać, że funkcja $z(x, y) = e^{\frac{x}{y}} \ln y$ spełnia równanie

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\ln y}.$$

4. Pokazać, że funkcja $T(l, g) = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ spełnia równanie

$$l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = 0.$$

5. Pokazać, że funkcja $z(x, y) = yF(x^2 - y^2)$ spełnia równanie

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2} \text{ dla}$$

a) $F(u) = \arctg u$ b) $F(u) = \frac{1}{\sin u}$.

6. Pokazać, że funkcja $z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ spełnia równanie

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}.$$

7. Pokazać, że funkcja $z(x, y) = \sqrt{x} \sin \frac{x}{y}$ spełnia równanie

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}.$$

8. Pokazać, że funkcja $u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ spełnia równanie

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1.$$

9. Pokazać, że funkcja $V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

10. Pokazać, że funkcja $z(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ spełnia równanie $y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}$.

11. Pokazać, że funkcja $z(x, y) = \ln(e^x + e^y)$ spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

12. Pokazać, że funkcja $u(x, y) = xe^{-\frac{y}{x}}$ spełnia równanie

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

13. Pokazać, że funkcja $z(x, y) = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

14. Obliczyć Δf dla funkcji $f(x, y) = \frac{y}{x}$, gdy $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0, 1$, $\Delta y = -0, 2$.

15. Przy odkształcaniu stożka jego promień R zwiększył się z 30 do 30,1 cm, zaś wysokość H zmniejszyła się z 60 do 59,5 cm. Obliczyć w przybliżeniu zmianę objętości V stosując wzór $dV \approx \Delta V$.

Znaleźć wszystkie punkty krytyczne podanych funkcji:

16. $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + (x + y - 1)^2}$;

17. $g(t, s) = \sqrt{(1 + t)^2 + t^2 + s^2}$;

18. $f(x, y) = xy\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2}$.

Odpowiedzi. **16.** $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. **17.** $(-\frac{1}{2}, 0)$; **18.** $(0, 0)$, $(0, \pm 2R)$, $(\pm 2R, 0)$ $(\pm \frac{2R}{\sqrt{3}}, \pm \frac{2R}{\sqrt{3}})$.

Znaleźć ekstrema podanych funkcji:

19. $f(x, y) = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$

21. $f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$

23. $f(x, y) = xy(6 - x - y)$

25. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6 \ln x$

27. $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}$

29. $f(x, y) = x + y + \frac{8}{xy}$

31. $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

33. $f(x, y) = e^{-2x}(x - y^2)$

35. $f(x, y) = e^{2x^2 - xy + y^2}$

20. $f(x, y) = 2xy - 4x - 2y$

22. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy$

24. $f(x, y) = y^2 + x^2(1 + y)^3$

26. $f(x, y) = x^2 + y - 2 \ln xy$

28. $f(x, y) = x^2y + \frac{x}{y} + \frac{1}{y}$

30. $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$

32. $f(x, y) = e^{-x}(x^2 - 2y)$

34. $f(x, y) = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$

36. $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2 + 2x)}$.

Odpowiedzi. **19.** $(0, 3)$ maksimum, **20.** brak ekstremum, **21.** $(0, 0)$ minimum, **22.** $(3, 3)$ minimum, **23.** $(2, 2)$ maksimum, **24.** $(0, 0)$ minimum, **25.** $(2, -1)$ minimum, **26.** $(1, 2)$ minimum, **27.** $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ $(1, -1)$, $(1, 1)$ minima, **28.** $(1, 1)$ minimum, $(-1, -1)$ maksimum, **29.** $(2, 2)$ minimum, **30.** $(4, 2)$ minimum, **31.** $(4, 4)$ maksimum, **32.** brak ekstremum, **33.** $(\frac{1}{2}, 0)$ maksimum, **34.** $(0, -2)$ minimum, **35.** $(0, 0)$ minimum, **36.** $(-1, 0)$ maksimum.

37. Znaleźć odległość punktu $M = (2, 5, 1)$ od płaszczyzny $\pi : x + 2y - z + 1 = 0$.

38. Znaleźć odległość między prostymi

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -t, \\ z = 0, \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = s, \end{cases} .$$

39. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y) = xy\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2} \text{ na zbiorze } D, \text{ gdzie } D : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4R^2.$$

40. W sferę o średnicy $2R$ wpisać prostopadłościan o największej objętości.

41. Znaleźć wartość najmniejszą i największą funkcji

$$f(x, y) = xy(3 - x - y) = 3xy - x^2y - xy^2 \text{ na domkniętym trójkącie ograniczonym prostymi } x + y = 3, x = 0, y = 0.$$

42. Wśród prostopadłościanów, których suma długości wszystkich krawędzi wynosi 12 znaleźć ten o największej objętości.

43. Znaleźć wartość najmniejszą i największą funkcji

$$f(x, y) = 2(xy + x(3 - x - y) + y(3 - x - y)) \text{ na domkniętym trójkącie ograniczonym prostymi } x + y = 3, x = 0, y = 0.$$

44. Wśród prostopadłościanów, których suma długości wszystkich krawędzi wynosi 12 znaleźć ten o największym polu powierzchni.

45. Znaleźć wartość najmniejszą i największą funkcji

$$f(x, y) = xy + 2x(3 - x - y) + 2y(3 - x - y) \text{ na domkniętym trójkącie ograniczonym prostymi } x + y = 3, x = 0, y = 0.$$

46. Wśród prostopadłościanów, których suma długości wszystkich krawędzi wynosi 12 znaleźć ten, którego suma powierzchni pięciu ścian jest największa.

8. CAŁKI PODWÓJNE

Obliczyć całki podwójne:

1. $\iint_D xy^3 dx dy$, gdzie $D = [0, 1] \times [0, 2]$.
2. $\iint_D \frac{y}{x^2} dx dy$, gdzie $D = [1, 2] \times [0, 1]$.
3. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, gdzie $D = [0, 3] \times [1, 3]$.
4. $\iint_D (x - y) dx dy$, gdzie $D = [-1, 1] \times [-2, 2]$.
5. $\iint_D xy(x - y) dx dy$, gdzie $D = [0, a] \times [0, b]$.
6. $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy$, gdzie $D = [0, 1] \times [0, 1]$.
7. $\iint_D e^{2x-y} dx dy$, gdzie D jest prostokątem o wierzchołkach $O = (0, 0)$, $P = (2, 0)$, $Q = (2, 1)$, $R = (0, 1)$.
8. $\iint_D (1 + 2y) dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $x = 0$, $y = 0$, $y = 3 - x$.
9. $\iint_D \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) dx dy$, gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $A = (1, 1)$, $B = (2, 1)$, $C = (2, 2)$.
10. $\iint_D (x + 1) dx dy$, gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach:
 - a) $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$;
 - b) $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$;
 - c) $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$;
 - d) $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.
11. $\iint_D (y - 2x) dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $x = 0$, $y = 0$, $2x + y - 2 = 0$.
12. Niech D będzie trójkątem o wierzchołkach $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Obliczyć
 - a) $\iint_D x dx dy$;
 - b) $\iint_D y dx dy$.
13. $\iint_D dx dy$, gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $O = (0, 0)$, $P = (2, 1)$, $Q = (4, 3)$.
14. $\iint_D xy dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywą $x^2 + y^2 = 1$.

15. $\iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywą $x^2 + y^2 = a^2$.
16. $\iint_D \sqrt{a^2-x^2} dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywą $x^2 + y^2 = a^2$.
17. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$, $y = x^2$.
18. $\iint_D (1-x^2) dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $x = 1$, $y^2 = x$.
19. $\iint_D (6-x) dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $x = 6$, $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$.
20. $\iint_D (4-y^2) dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2$.

Odpowiedzi. **1.** 2, **2.** $\frac{1}{4}$, **3.** 44, **4.** 0, **5.** $-\frac{1}{6}b^2a^2 + \frac{1}{6}b^2a^3$, **6.** $\frac{1}{12}\pi$, **7.** $-\frac{1}{2}(e^3 - e^4 - e^{-1} + 1)$, **8.** $\frac{27}{2}$, **9.** $\frac{1}{2}$, **10.** (a) $\frac{5}{6}$; (b) $\frac{2}{3}$; (c) $\frac{2}{3}$; (d) $\frac{5}{6}$, **11.** 0, **12.** (a) 0; (b) $\frac{1}{3}$, **13.** 1, **14.** 0, **15.** $4a$, **16.** $\frac{8}{3}a^3$, **17.** $\frac{52}{105}$, **18.** $\frac{16}{21}$, **19.** $\frac{48}{5}\sqrt{6}$ **20.** $\frac{256}{21}$.

Pokazać, że:

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y} dy \right) dx = 1$.
22. $\int_0^3 \left(\int_{\frac{x}{3}}^1 e^{y^2} dy \right) dx = \frac{3}{2}(e-1)$.
23. $\int_{-a}^a \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2} dy \right) dx = \frac{8}{3}a^3$.
24. $\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dy \right) dx = \frac{a^2}{2}$.

9. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

Narysować linie całkowe równań:

1. $y' = -\sin x$,
2. $y' + y \operatorname{tg} x = 0$,
3. $y'(x^2 - 4) = 2xy$
4. $yy' + x = 0$,
5. $xy' - y = 0$,
6. $xy' + y = 0$,
7. $y' = y$
8. $y' = y^2$.

Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

9. $x^2y' + y = 0$,
10. $y'\sqrt{a^2 + x^2} = y$,
11. $y'x^3 = 2y$,
12. $dr + r \operatorname{tg} \varphi d\varphi = 0$; $r(\pi) = 2$,
13. $\frac{dx}{dt} = x - x^2$, $x(0) = \frac{1}{2}$,
14. $y' = -0,005y$, $y(0) = 10^5$
15. $y' = -0,005y + 25$, $y(0) = 10^5$
16. $y' = e^{-y} \cos 2x$, $y(0) = 0$,
17. $2y'\sqrt{x} = y$; $y(4) = 1$,
18. $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$; $y(0) = 1$,
19. $x^2y' + y^2 = 0$; $y(-1) = 1$,
20. $y' = (2y + 1) \operatorname{ctg} x$; $y = \frac{1}{2}$, gdy $x = \frac{\pi}{4}$,
21. $(1 + x^2)y' + 1 + y^2 = 0$,
22. $(x^2 + x)y' = 2y + 1$,
23. $y' = 10^{x+y}$,
24. $y' = 2\sqrt{y} \ln x$; $y(e) = 1$.

Odpowiedzi **9.** $y = Ce^{\frac{1}{x}}$; **10.** $y = C(x + \sqrt{a^2 + x^2})$; **11.** $y = C e^{-\frac{1}{x^2}}$; **12.** $r = -2 \cos \varphi$; **13.** $x = \frac{1}{1+e^{-t}}$; **14.** $y = 10^5 e^{-0,005t}$; **15.** $y = 5000(1 + 19e^{-0,005t})$; **16.** $y = \ln\left(\frac{1}{2} \sin 2x + 1\right)$; **17.** $y = \frac{1}{e^2} e^{\sqrt{x}}$; **18.** $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$; **19.** $y = -x$; **20.** $y = 2 \sin^2 x - \frac{1}{2}$; **21.** $y = \frac{C-x}{1+Cx}$; **22.** $2y+1 = C \frac{x^2}{(1+x)^2}$; **23.** $-10^{-y} = 10^x + C$; **24.** $\sqrt{y} = x \ln x - x + 1$;

Równania różniczkowe postaci $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

25. $y' = \frac{x+y}{x}$
26. $x^2y' = y^2 + xy$,
27. $\frac{ds}{dt} = \frac{s}{t} - \frac{t}{s}$,
28. $xy' + 2\sqrt{xy} = y$,
29. $2xyy' = y^2 - x^2$,
30. $y'x - y = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y(1) = 0$,
31. $x^2y' = y^2 - xy$; $y(-1) = 1$,
32. $xy' = y\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$; $y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$,
33. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$,
34. $(xy' - y) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} = x$; $y(1) = 0$,
35. $yy' = 2y - x$,
36. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$,

Odpowiedzi **25.** $y = x \ln|x| + Cx$; **26.** $y = \frac{x}{C - \ln|x|}$; **27.** $s^2 = 2t^2 \ln \frac{C}{t}$; **28.** gdy $x > 0$, $\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln \frac{C}{x}$, gdy $x < 0$, $\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln Cx$; **29.** $x^2 + y^2 = Cx$; **30.** $y = \frac{x^2-1}{2}$; **31.** $y = \frac{2x}{1-3x^2}$; **32.** $y = xe^{-\frac{x}{2}}$; **33.** $y^2 = Cxe^{-\frac{y}{x}}$; **34.** $x^2 + y^2 = e^{2\frac{y}{x} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}}$; **35.** $y - x = Ce^{\frac{x}{y-x}}$; **36.** $y - 2x = Cx^3(x + y)$.

Wyznaczyć równanie rodziny krzywych prostopadłych do rodziny:

37. parabol $ay = x^2$,
38. hiperbol $xy = c$,
39. elips $x^2 + 4y^2 = a^2$,
40. okręgów $x^2 + y^2 = 2ax$.

Odpowiedzi **37** $2y^2 + x^2 = c^2$; **38** $y^2 - x^2 = C$; **39** $y = Cx^4$; **40** $x^2 + y^2 = 2Cy$.

Równania różniczkowe liniowe

41. $y' - \frac{y}{x} = 2x$, $y(1) = 3$, 42. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x^2}$, $y(0) = 0$,
 43. $y' + 2y = e^{3x}$, 44. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$,
 45. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$, 46. $y' = \frac{y+1}{x}$,
 47. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$, 48. $xy' + y = \ln x + 1$,
 49. $y' + 2y = 4x$, 50. $y' - (x + 2)y = x + 2$,
 51. $(x^2 + 4)y' + 3xy = x$, 52. $y' - \frac{3y}{x} = x$,
 53. $t^2 \frac{ds}{dt} = 2ts - 3$; $s(-1) = 1$, 54. $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$,
 55. $y' + y \cos x = \sin 2x$, 56. $t ds - 2s dt = t^3 \ln t dt$,
 57. $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$, 58. $(2x + 1)y' + y = x$,
 59. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$, 60. $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$.

- Odpowiedzi 41. $y = 2x^2 + x$; 42. $y = \frac{x}{\cos x}$; 43. $y = e^{-2x} \left(\frac{1}{5} e^{5x} + C \right)$
 44. $y = \left(\frac{x^2}{2} + C \right) e^{-x^2}$; 45. $y = (x + C)(1 + x^2)$; 46. $y = Cx - 1$;
 47. $y = -\frac{1}{2x^2} e^{-x^2} + \frac{C}{x^2}$; 48. $y = \ln x + \frac{C}{x}$; 49. $y = 2x - 1 + C e^{-2x}$;
 50. $y = -1 + C e^{\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)}$; 51. $y = \frac{1}{3} + \frac{C}{(\sqrt{x^2+4})^3}$; 52. $y = -x^2 + Cx^3$;
 53. $s = \frac{1}{t} + 2t^2$; 54. $y = \frac{\sin^2 x + C}{\cos x}$; 55. $y = 2 \sin x - 2 + C e^{-\sin x}$; 56.
 $s = t^3 \ln t - t^3 + Ct^2$; 57. $y = \frac{\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \cos x + C}{\cos x}$; 58. $y = \frac{x-1}{3} + \frac{C}{\sqrt{2x+1}}$;
 59. $y = x^2 + C x^2 e^{\frac{1}{x}}$; 60. $y = \frac{\ln \left| C(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \right|}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Równania różniczkowe zupełne

61. $(3x^2 + 2y) dx + (2x - 3) dy = 0$,
 62. $(3x^2y - 4xy^2) dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3) dy = 0$,
 63. $\left(4 - \frac{y^2}{x^2} \right) dx + \frac{2y}{x} dy = 0$,
 64. $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0$,
 65. $e^{-y} dx + (1 - x e^{-y}) dy = 0$,
 66. $yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy = 0$,
 67. $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0$,
 68. $(x \cos 2y + 1) dx - x^2 \sin 2y dy = 0$.

- Odpowiedzi. 61. $x^3 + 2yx - 3y = C$; 62. $x^3y - 2x^2y^2 + 3y^4 = C$;
 63. $y^2 + 4x^2 = Cx$; 64. $x^3 e^y - y = C$; 65. $x e^{-y} + y = C$; 66. $x^y = C$,
 67. $x^2 \cos^2 y + y^2 = C$; 68. $\frac{1}{2} x^2 \cos 2y + x = C$.

Równania różniczkowe rzędu drugiego

69. $y'' = -y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
 70. $y'' = -y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
 71. $y'' = y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
 72. $yy'' = (y')^2$;
 73. $y'' + 2y(y')^3 = 0$;
 74. $4y'' \sqrt{y} = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$;

$$75. (1 + y^2) y'' = 2y (y')^2;$$

$$76. y'' \frac{\cos y}{\sin y} = -2 (y')^2;$$

$$77. yy'' - (y')^2 = y';$$

$$78. \frac{d^2y}{dx^2} = \alpha \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad y(0) = \frac{1}{\alpha}, \quad y'(0) = 0;$$

$$79. xy'' - y' = e^x x^2;$$

$$80. y'' x \ln x = y';$$

$$81. y'' + 2(y')^2 x = 0;$$

$$82. x^3 y'' + x^2 y' = 1.$$

Odpowiedzi. **69.** $y = \sin x$; **70.** $y = \cos x$; **71.** $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; **72.** $y = C_2 e^{C_1 x}$; **73.** $\frac{y^3}{3} + y C_1 = x + C_2$; **74.** $y = \sqrt[3]{\left(1 - \frac{3}{4}x\right)^4}$; **75.** $y = \operatorname{tg}(C_1 x + C_2)$; **76.** $\operatorname{tg} y = C_1 x + C_2$; **77.** $y = \frac{C_2}{C_1} e^{C_1 x} + \frac{1}{C_1}$; **78.** $y = \frac{1}{\alpha} \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2}$; **79.** $y = e^x (x - 1) + x^2 C_1 + C_2$; **80.** $y = C_1 x (\ln x - 1) + C_2$; **81.** gdy $C_1 > 0$, $y = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2$, gdy $C_1 < 0$, $y = \frac{1}{2\sqrt{-C_1}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{-C_1}}{x + \sqrt{-C_1}} \right| + C_2$, gdy $C_1 = 0$ $y = C_2 - \frac{1}{x}$; **82.** $y = \frac{1}{x} + C_1 \ln |x| + C_2$.

10. SZEREGI LICZBOWE, SZEREGI POTĘGOWE

Korzystając z definicji zbadać zbieżność szeregu:

- | | |
|--|---|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n,$ | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$ |
| 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!},$ | 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$ |
| 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$ | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$ |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n,$ | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{2^n}.$ |

Odpowiedzi.

1. rozbieżny, 2. rozbieżny, 3. zbieżny, 4. zbieżny, 5. zbieżny,
6. rozbieżny, 7. rozbieżny, 8. rozbieżny.

Obliczyć sumę szeregu:

- | | |
|--|--|
| 9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n},$ | 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n},$ |
| 11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n + 4^n}{6^n},$ | 12. $\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{11}} + \dots$ |

- Odpowiedzi. 9. $\frac{3}{2}$, 10. $\frac{1}{3}$, 11. $\frac{13}{2}$, 12. $\frac{1}{24}$.

Zbadać zbieżność szeregu

- | | |
|---|---|
| 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1},$ | 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}},$ |
| 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{2^n},$ | 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n},$ |
| 17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$ | 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3},$ |
| 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$ | 20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n},$ |
| 21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3},$ | 22. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}.$ |

- Odpowiedzi. 13. rozbieżny, 14. rozbieżny, 15. zbieżny, 16. zbieżny,
17. zbieżny (warunkowo zbieżny), 18. zbieżny, 19. rozbieżny, 20.
rozbieżny, 21. zbieżny, 22. zbieżny.

Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów:

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{23.} & \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n, \\
 \mathbf{24.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}, \\
 \mathbf{25.} & \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x+1)^n, \\
 \mathbf{26.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^3}, \\
 \mathbf{27.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}}, \\
 \mathbf{28.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} (x-1)^n, \\
 \mathbf{29.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{2n+1}}, \\
 \mathbf{30.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}, \\
 \mathbf{31.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-2)^n}{n}, \\
 \mathbf{32.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}.
 \end{array}$$

Odpowiedzi. **23.** $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$, **24.** $-2 \leq x < 0$, **25.** $-2 < x < 0$, **26.** $-2 \leq x \leq 0$, **27.** $-10 \leq x < 10$, **28.** $0 < x < 2$, **29.** $-3 \leq x < -1$, **30.** $-1 \leq x \leq 3$, **31.** $\frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2}$, **32.** $-3 \leq x < 3$.

Pokazać, że

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{33.} \quad x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \dots; \\
 \mathbf{34.} \quad \frac{\sin x}{x} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots; \\
 \mathbf{35.} \quad \int e^{-x^2} dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots
 \end{array}$$

Obliczyć z dokładnością do trzech miejsc po przecinku

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{36.} & \int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}, \quad ; \\
 \mathbf{37.} & \int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx, \\
 \mathbf{38.} & \int_0^1 e^{-x^2} dx, \\
 \mathbf{39.} & \int_0^1 \sin \sqrt{x} dx.
 \end{array}$$

Odpowiedzi. **36.** 0,867, **37.** 0,508, **38.** 0,747, **39.** 0,602.

11. ANALIZA WEKTOROWA

1. Znaleźć jednostkowy wektor normalny do powierzchni stożka opisanej równaniem $x^2 + y^2 = 2z^2$ w punkcie $(1, 1, 1)$.
2. Wyznaczyć jednostkowy wektor normalny do powierzchni opisanej równaniem $xyz = 1$ w punkcie $(1, 1, 1)$.
3. Wyznaczyć jednostkowe pole wektorowe normalne do powierzchni sfery o środku w początku układu i promieniu a i skierowane na zewnątrz.
4. Obliczyć $\operatorname{div} \vec{A}$ oraz $\operatorname{rot} \vec{A}$ dla $\vec{A} = xy^2 \vec{i} + xyz \vec{j} + y^2z \vec{k}$.
5. Obliczyć $\operatorname{div} \vec{A}$ oraz $\operatorname{rot} \vec{A}$ dla $\vec{A} = \sin yz \vec{i} + \sin xz \vec{j} + \sin xy \vec{k}$.
6. Niech $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$. Wykazać, że $\nabla \cdot \vec{r} = 3$ oraz $\nabla \times \vec{r} = \vec{0}$ (o ile $\vec{r} \neq \vec{0}$).
7. Niech $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$. Wykazać, że $\operatorname{grad} |\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ (o ile $\vec{r} \neq \vec{0}$).
8. Obliczyć $\int_{\Gamma} \frac{y}{x} dl$, gdzie Γ jest łukiem paraboli $y = x^2$ zawartym między punktami $(1, 1)$, $(2, 4)$.
9. Obliczyć $\int_{\Gamma} (x + y) dl$, gdzie Γ jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$.
10. Obliczyć $\int_{\Gamma} xy dl$, gdzie Γ jest obwodem prostokąta o wierzchołkach: $O = (0, 0)$, $P = (4, 0)$, $Q = (4, 2)$, $R = (0, 2)$.
11. Obliczyć $\int_{\Gamma} \frac{z^2}{x^2 + y^2} dl$, gdzie Γ jest pierwszym zwojem linii śrubowej: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = at$.
12. Obliczyć $\int_{\Gamma} (y dy + x dx)$, gdzie Γ jest okręgiem $x^2 + y^2 = 1$ w kierunku dodatnim.
13. Obliczyć $\int_{\Gamma} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right)$, gdzie Γ jest okręgiem $x^2 + y^2 = 1$ w kierunku dodatnim.
14. Obliczyć $\int_{\Gamma} (-y dx + x dy)$, gdzie Γ jest sparametryzowana równaniem $\vec{r}(t) = (t^2 - 1) \vec{i} + (t^3 - t) \vec{j}$ dla $-1 \leq t \leq 1$.
15. Czy całka $\int_{\Gamma} (2y + 2) dx + 2x dy$ zależy od drogi całkowania?
16. Obliczyć $\int_{(0,0)}^{(1,1)} ((2y + 2) dx + 2x dy)$.
17. Czy całka $\int_{\Gamma} (yz dx + xz dy + xy dz)$ zależy od drogi całkowania?

18. Sprawdzić twierdzenie Greena dla $\oint_{\Gamma} ((x^2 + y^2)dx + (x + 2)dy)$, gdzie Γ jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

19. Sprawdzić twierdzenie Greena w przypadku całki $\oint_{\Gamma} (xy dy - y^2 dx)$, gdzie Γ jest okręgiem $x^2 + y^2 = 4$ w kierunku dodatnim;

20. Stosując twierdzenie Greena obliczyć całkę $\oint_{\Gamma} ((xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy)$, gdzie Γ jest brzegiem kwadratu o wierzchołkach $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (0, 1)$;

21. Stosując twierdzenie Greena obliczyć całkę $\oint_{\Gamma} \left(\frac{dx}{y} - \frac{dy}{x} \right)$, gdzie Γ jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A = (1, 1)$, $B = (2, 1)$, $C = (2, 2)$.

22. Stosując twierdzenie Greena obliczyć całkę $\oint_{\Gamma} ((y - x^2) dx + (2x + y^2) dy)$, gdzie Γ jest brzegiem prostokąta o wierzchołkach $A = (1, 1)$, $B = (4, 1)$, $C = (4, 3)$, $D = (1, 3)$.

23. Pokazać, że $\oint_{\Gamma} ((x^3 y + e^y) dx + (xy^3 + xe^y - 2y) dy) = 0$, gdzie Γ jest krzywą zamkniętą, symetryczną względem osi współrzędnych.

24. Obliczyć pole elipsy $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

25. Obliczyć pole pętli linii $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$.

26. Korzystając ze wzoru $|\Sigma| = \iint_{\Sigma} dS$ obliczyć pole powierzchni bocznej walca o promieniu R i wysokości H .

27. Obliczyć $\iint_{\Sigma} (6x + z - y^2) dS$ po powierzchni sparametryzowanej równaniem $\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + u\vec{k}$ dla $0 \leq u \leq 1$ i $0 \leq v \leq 1$.

28. Obliczyć $\iint_{\Sigma} x dS$ po tej części sfery $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, która leży w pierwszej oktancie.

29. Obliczyć $\iint_{\Sigma} (x dydz + y dzdx + z dxdy)$ po zewnętrznej stronie sfery $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

30. Za pomocą wzoru Gaussa obliczyć $\iint_{\Sigma} (x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy)$ braną po zewnętrznej stronie ostosłupa utworzonego z płaszczyzn $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

31. Obliczyć $\int_{\Gamma} (x dx + (x + y) dy + (x + y + z) dz)$, gdzie $\Gamma : \begin{cases} x = a \sin t, \\ y = a \cos t, \\ z = a (\sin t + \cos t), \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

Odpowiedzi. **1.** $\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$; **2.** $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$; **4.** $\operatorname{div} A = 2y^2 + xz$, $\operatorname{rot} A = (2yz - xy)\vec{i} + (yz - 2xy)\vec{k}$; **5.** $\operatorname{div} A = 0$, $\operatorname{rot} A = (x \cos xy - x \cos xz)\vec{i} - (y \cos xy - y \cos yz)\vec{j} + (z \cos xz - z \cos yz)\vec{k}$; **8.** $\frac{1}{12}(\sqrt{17^3} - \sqrt{5^3})$; **9.** $1 + \sqrt{2}$; **10.** 24; **11.** $\frac{\sqrt{2}a^8\pi^3}{3}$; **12.** 0; **13.** 2π ; **14.** $\frac{16}{15}$; **15.** nie; **16.** 4; **17.** nie; **18.** $\frac{1}{6}$; **19.** 0; **20.** 0; **21.** $\frac{1}{2}$; **22.** 6; **24.** πab ; **25.** $\frac{8}{15}$; **27.** $\sqrt{2} \frac{19}{6}$; **28.** $\frac{\pi a^3}{4}$; **29.** $4\pi a^3$; **30.** $\frac{a^4}{4}$; **31.** $-\pi a^2$.

12. LITERATURA

- [1] G.N.Berman, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 1966.
- [2] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna, Cz. 1-2*, Oficyna Wydawnicza GIS, Wrocław 2003.
- [3] B. Gdowski, E. Pluciński, *Zbiór zadań z rachunku wektorowego i geometrii analitycznej*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
- [4] I. Jeśmanowicz, J. Łoś *Zbiór zadań z algebry*, PWN, Warszawa 1969
- [5] W.Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, Cz. I-II*, PWN, Warszawa 2001.
- [6] D.A. McQuarrie, *Matematyka dla przyrodników i inżynierów*, PWM, Warszawa 2005.
- [7] W.P.Minorski, *Zbiór zadań z matematyki wyższej*, WNT, Warszawa 1974.